كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : الثالثة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

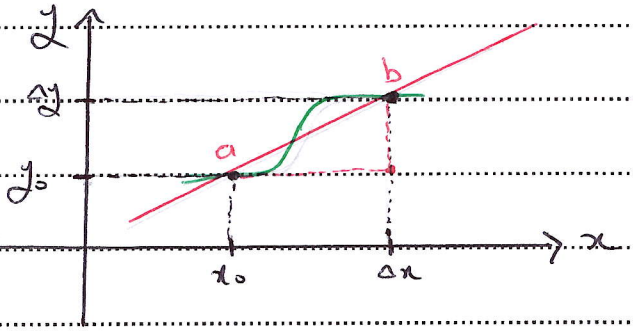
Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الاشتقاق :

أولاً : التعريف الأساسي للاشتقاق :

ليكن لدينا الدالة $y=f(x)$ المحدودة والمستمرة على مجال مفروض، ولنأخذ تزايد x وليكن Δx عندئذٍ سيرافق هذا التزايد مقدار هو Δy



$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

$$\Rightarrow \Delta y=f(x+\Delta x)-y \Rightarrow \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

نقسم على Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

معنى : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تمثل الزاوية tan

tan هو ميل

نأخذ النهاية من أجل Δx تسعى إلى الصفر :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وبالمقابل هندسياً : عندما تنعدم Δx إلى الصفر أصبح القاطع ab هو

مماس عند النقطة a.

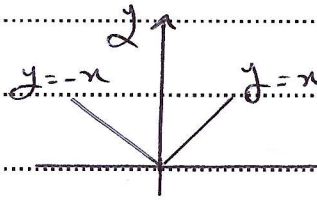
فأصبح التعريف العام للاشتقاق: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

وبالتالي:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

نتيجة: كل دالة قابلة للاشتقاق هي دالة معرفة ومستمرة، لكن العكس غير صحيح.

مثلاً: لدينا الدالة: $f(x) = |x|$



معرفة على R ومستمرة على نفس المجال، ولكن غير قابلة للاشتقاق لأن:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

ثانياً: خواص الاشتقاق الدوال الأساسية:

1) الدالة الثابتة:

$f(x) = a$ حيث: $a = Const.t$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a-a}{\Delta x} = 0$$

2) دالة المتغير:

$$f(x) = x^n$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

حسب منشور دستور هو نيوتن:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \frac{n}{n!} x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot x^{n-3} \cdot \Delta x^3 + \cdots + \frac{n-n}{(n-n)!} \cdot \Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بأخذ النهاية:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{n}{n!} \cdot x^{n-1} + 0 + 0 + \dots + 0 = n \cdot x^{n-1}$$

$$\Rightarrow (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

3) دالة الجداء:

$$f(x) = u \times v$$

$$(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$$

حيث: $u = u(x)$, $v = v(x)$

4) دالة القسمة:

$$f(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

5) مشتق القوة:

$f(x) = a^x$ حيث: $a = constnit$

مشتق الأس x الدالة مضروبة بـ Ln x الأساس

$$(a^x)' = 1 \times a^x \times \ln a$$

إذا كان x دالة ضمن:

$$(a^u)' = u' \times a^u \times \ln a$$

مثال: $y = 3^{x^2}$

الحل: $y' = 2x \times 3^{x^2} \times \ln 3$

6) مشتق دالة الدالة:

$$f(x) = f(g(x))$$, حيث: $g(x) = u$

$$f'(x) = f'u \times u'x$$

مثال: $y = \cos x^3$ حيث $x^3 = u$

الحل:

$$y' = (\cos u)' = -\sin u \times 3x^2$$

$$= -\sin x^3 \times 3x^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مشتق الدوال المثلثية :

1) مشتق الدالة : $y = \sin x$

حسب التعريف الأساسي للاشتقاق :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

بتطبيق دستور التحويل من مجموع إلى جداء :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \times \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \times \cos x + 0$$

$$\Rightarrow (\sin x)' = \cos x$$

سؤال امتحان : اثبت أن مشتق الدالة cos هو -sin حسب التعريف الأساسي للاشتقاق

2) مشتق الدالة : $f(x) = \cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

3) مشتق الدالة : $f(x) = \tan x$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \quad \text{(أو)} \quad \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{(أو)} \quad \sec^2 x$$

تذكر : $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4) مشتق الدالة: $f(x) = \cot x$

$$(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

تذكر: $\csc^2 x = \frac{1}{\sin x}$

- مشتق الدوال اللوغاريتمية والأسية:

1) مشتق الدالة: $y = f(x) = \ln x$

حسب التعريف الأساسي للمشتقات:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

نضرب ونقسم: $\frac{1}{x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

تذكر: $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ← لأن

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

2) مشتق الدالة: $y = e^x$

$$(e^x)' = e^x$$

- قاعدة المشتقات اللوغاريتمية:

نستخدم هذه القاعدة عندما تكون دالة أس دالة، نأخذ لوغاريتم الطرفين ونجري المشتقات حسب القواعد السابقة.

مثال: أوجد مشتق الدالة الآتية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

1) x^x ، 2) x^{x^x} ، 3) $x^{\sin x}$ ، 4) $(\sin x)^x$ ، 5) $x^{x^{x^x}}$

1) $y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x$ الحل:

نطبق خواص اللوغاريتم $\rightarrow \ln y = x \ln x$

نشتق الطرفين $\rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + x \times \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$

$\Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1)$

2) $y = x^{x^x}$ $\xrightarrow{\ln \text{ نأخذ}}$ $\ln y = x^x \ln x$

نشتق $\rightarrow \frac{y'}{y} = (x^x)' \ln x + x^x \times \frac{1}{x}$ (*)

من المثال السابق لدينا:

$(x^x)' = x^x (\ln x + 1)$ نعوض (*)

$\frac{y'}{y} = x^x (\ln x + 1) \ln x + x^x \times \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y' = x^x \left[x^x (\ln x + 1) \ln x + x^x \times \frac{1}{x} \right]$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z