كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : ملحق الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

لمكاملة الدوال الجذرية سنحاول تحويلها إلى مكاملة لدوال كسرية

حساب التكامل من الشكل $I = \int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{p}{s}}\right).dx$ حيث R دالة بالمتحول x و $m, n, \dots, p, s$ أعداد صحيحة.

لنفرض ان المقام المشترك للكسور $\frac{m}{n}, \dots \dots, \frac{p}{s}$ هو k

عندئذٍ لحساب هذه التكاملات نفرض أن $x = t^k$ فيكون $dx = kt^{k-1}dt$ ، نبدل في التكامل المعطى قيمة كل من x و dx فيتحول إلى تكامل كسري.

مثال: أوجد التكامل $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

نكتب التكامل بالشكل: $I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$ بالتالي نفرض أن $x = t^6$ فيكون $dx = 6t^5dt$ ، نبدل في التكامل نجد: $I = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6(t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1}$

$$I = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\, ln|t+1| + c$$

$$I = 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + 6\left(\sqrt[6]{x}\right) - 6\, ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c$$

مثال: أوجد التكامل $I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

نكتب التكامل بالشكل: $I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+x^{\frac{1}{3}}}$ بالتالي نفرض أن $x = t^6$ فيكون $dx = 6t^5dt$ ، نبدل في التكامل نجد:

$$I = \int \frac{t^3 \times 6t^5dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^8dt}{1+t^2} = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right).dt$$

$$I = 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + rctg\ t\right) + c$$

$$I = 6\left(\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{3} - \sqrt[6]{x} + rctg\ \left(\sqrt[6]{x}\right)\right) + c$$

حساب التكاملات من الشكل: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

لحساب هذه التكاملات نقوم برد ثلاثي الحدود الموجود تحت الجذر إلى مجموع مربعي مقدارين او فرق مربعي مقدارين لتنتج لدينا الحالات الآتية:

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}} = argsh\left(\frac{t}{k}\right) + c = ln\left|t + \sqrt{t^2+k^2}\right| + c$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-k^2}} = argch\left(\frac{t}{k}\right) + c = ln\left|t + \sqrt{t^2-k^2}\right| + c$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} = arcsin\left(\frac{t}{k}\right) + c$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+k)^2}} = \int \frac{dt}{|t+k|} = \ln|t+k| + c$$

تمارين: أوجد كل من التكاملات الآتية:

$$\boldsymbol{I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}}}$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2 + 4x + 6 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 6 = (x+2)^2 + 2$$

نفرض أن $t = x + 2$ فيكون $dx = dt$ نبدل في التكامل فنجد:

$$I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2}} = argsh\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$I_1 = argsh\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{3dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}}$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

نفرض أن $t = x - 2$ فيكون $dx = dt$ نبدل في التكامل فنجد:

$$I_2 = \int \frac{3dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = 3\, argch\left(\frac{t}{1}\right) + c$$

$$I_2 = 3\, argch\,(x-2) + c$$

$$\boldsymbol{I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 6x}}}$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$-x^2 + 6x = -x^2 + 6x - 9 + 9 = 9 - (x-3)^2$$

نفرض أن $t = x - 3$ فيكون $dx = dt$ نبدل في التكامل فنجد:

$$I_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = arcsin\left(\frac{t}{3}\right) + c$$

$$I_3 = arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2}} = \int \frac{dx}{|x+1|} = \ln|x+1| + c$$

حساب التكاملات من الشكل: $\boldsymbol{I = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

لحل مثل هذه التكاملات نفرض أن: $t = \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)'$

$t = \frac{1}{2}(2ax + b) = ax + \frac{b}{2}$ فيكون $dt = a.dx$ و بالتالي $dx = \frac{dt}{a}$ و

$t = x - \frac{t-\frac{b}{2}}{a}$ ، نبدل في التكامل المعطى و نميز حالتين :

$a > 0 \implies I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+m}}$ و هو تكامل معروف

$< 0 \implies I = \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$ و هو أيضاً تكامل معروف

أمثلة: أوجد كل من التكاملات الآتية:

$$\boldsymbol{I_1 = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}.dx}$$

نفرض أن: $t = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)'$

$t = \frac{1}{2}(2x-4) = x - 2$ فيكون $dt = .dx$ و بالتالي $dx = dt$ و $t = x + 2$

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}.dx = \int \frac{2(t+2)+1}{\sqrt{t^2-1}}.dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}.dt + \int \frac{5}{\sqrt{t^2-1}}.dt$$

$$I_1 = 2\sqrt{t^2-1} + argch\, t + c$$

$$I_1 = 2\sqrt{x^2-4x+3} + argch\,(x+2) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}.dx}$$

نفرض أن: $t = \frac{1}{2}(6 - 2x - x^2)'$ أي $t = -1 - x$ فيكون $dt = -dx$

$$\boldsymbol{6 - 2x - x^2} = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 6 = -(x+1)^2 + 7$$

نعوض في التكامل المعطى

$$I_2 = \int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}(-dt) = \int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}}.dt = \int \frac{t}{\sqrt{7-t^2}}.dt - 4\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}$$

$$I_2 = -\sqrt{7-t^2} - 4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + c$$

$$= -\sqrt{6-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{(-x-1)}{\sqrt{7}} + c$$