كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة :الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

$$I_1 = \int \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

نفرض $t = x-1$ فيكون $dt = dx$ و $x = t+1$

$$I_1 = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\cdot dt = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^2}\,dt$$

$$= \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right).dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + c$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

$$I_2 = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\cdot dx$$

نفرض $t = e^x$ $\Leftarrow$ $dt = e^x dx$ حيث $e^{2x} = (e^x)^2 = t^2$

$$I_2 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t + c$$

$$I_2 = \arctg(e^x) + c$$

$$I_3 = \int e^{-x}.\sin x\,.dx$$

نفرض $u = +e^{-x}$ $\Leftarrow$ $du = -e^{-x}.dx$

$dv = \sin x.dx$ $\Leftarrow$ $v = -\cos x$

$$I_3 = -e^{-x}.\cos x - \int (-\cos x).(-e^{-x}dx) = -e^{-x}\cos x - \underbrace{\int e^{-x}.\cos x.dx}_{J}$$

$$J = \int e^{-x} \cdot \cos x \, dx$$

نكامل J بالتجزئة أيضا

$$u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$$

$$dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$J = e^{-x} \cdot \sin x - \int (-e^{-x} \sin x) \, dx = e^{-x} \cdot \sin x + \frac{I}{3}$$

نعوض في عبارة I_3 :

$$\frac{I}{3} = -e^{-x} \cdot \cos x - \left[e^{-x} \cdot \sin x + \frac{I}{3} \right]$$

$$= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \frac{I}{3}$$

$$2\frac{I}{3} = -e^{-x}(\cos x + \sin x) \Rightarrow \frac{I}{3} = -\frac{1}{2} e^{-x}(\cos x + \sin x) + C$$

$$I_4 = \int \operatorname{arctg} x \cdot dx$$

نفرض $u = \operatorname{arctg} x$ فإن

$$du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I_4 = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$I_5 = \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

نفرض $t = x^2$ ومنه $dt = 2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$$I_5 = \int \frac{\frac{3}{2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3}{2}\arcsin t + c$$

$$I_5 = \frac{3}{2}\arcsin(x^2) + c$$

$$I_6 = \int \frac{dx}{x^2+3}$$

$$I_6 = \int \frac{dx}{3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{x^2+25}$$

$$I_7 = \int \frac{dx}{25\left(\frac{x^2}{25}+1\right)} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1} = \frac{1}{25}\int \frac{5\,d\left(\frac{x}{5}\right)}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}$$

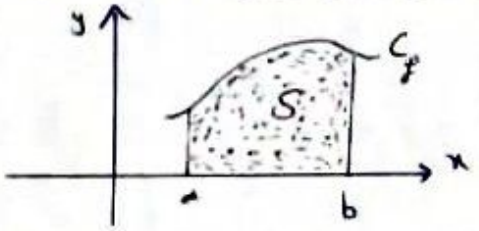
$$= \frac{1}{5}\int \frac{d\left(\frac{x}{5}\right)}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

* حساب المساحة

1 حساب المساحة بالإحداثيات الديكارتية :

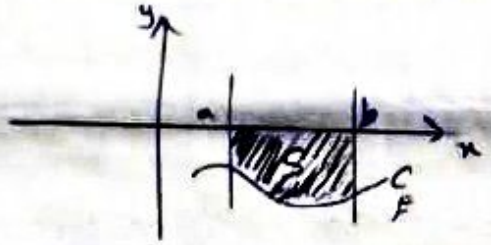
لحساب المساحة المحصورة بين منحنى التابع ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ نرسم الخط البياني للتابع ونميز ثلاث حالات :

الحالة الأولى : الخط البياني للدالة يقع بالكامل فوق محور الفواصل عندئذ تعطى المساحة بالعلاقة الآتية :



$$S = \int_a^b f(x).dx$$

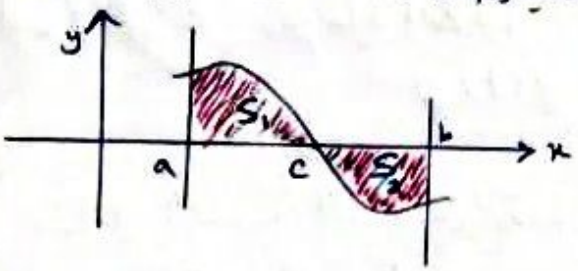
الحالة الثانية: الخط البياني يقع بالكامل تحت محور الفواصل عندئذ تعطى المساحة بالعلاقة



$$S = -\int_a^b f(x).dx$$

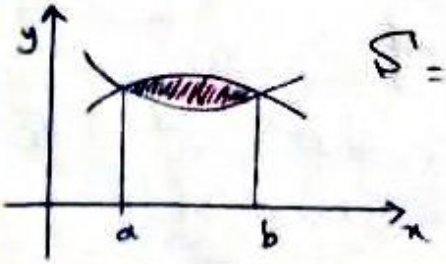
الحالة الثالثة: الخط البياني C_f يقطع محور الفواصل بنقطة أو أكثر

لنفرض أن C_f يقطع $(x'x)$ في النقطة $(c,0)$ حيث $c \in [a,b]$ عندئذ تكون المساحة المطلوبة هي مجموع لمساحتين أي S_1 و S_2



$$S = \int_a^b f(x).dx + \int_c^b -f(x).dx$$

ملاحظة : إذا كان السطح المستوي مغلقاً ومحصوراً بين منحنيين نابين $f(x)$ و $g(x)$

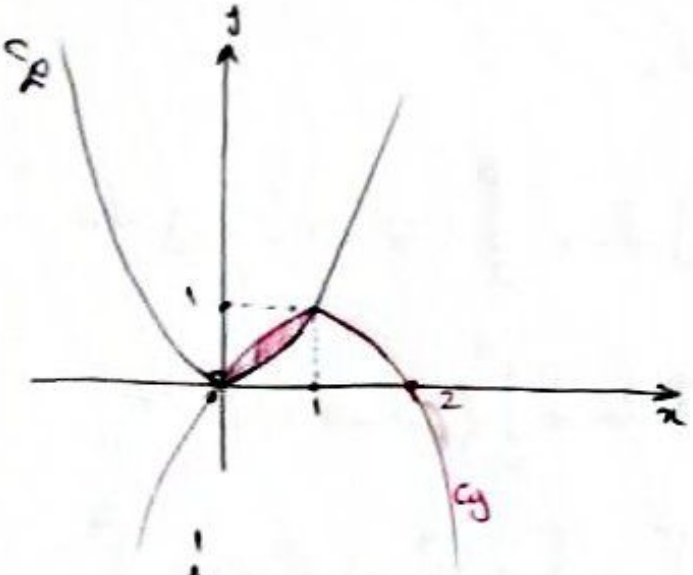


فإن المساحة تعطى بالعلاقة $S = \int_a^b |f(x)-g(x)|.dx$

حيث a و b فاصلتي نقاط تقاطع C_g و C_f

مثال (2) : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين :

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 2x - x^2$



نوجد نقاط تقاطع المنحنيين :

$f(x) = g(x)$

$x^2 = 2x - x^2$

$x^2 - 2x + x^2 = 0$

$2x^2 - 2x = 0$

$2x(x-1) = 0$ ⟵ لما $x = 0$ أو $x = 1$

$f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$

نقاط التقاطع

$(0,0)$ و $(1,1)$

حدود التكامل

على المجال $[0,1]$ نجد C_g فوق C_f

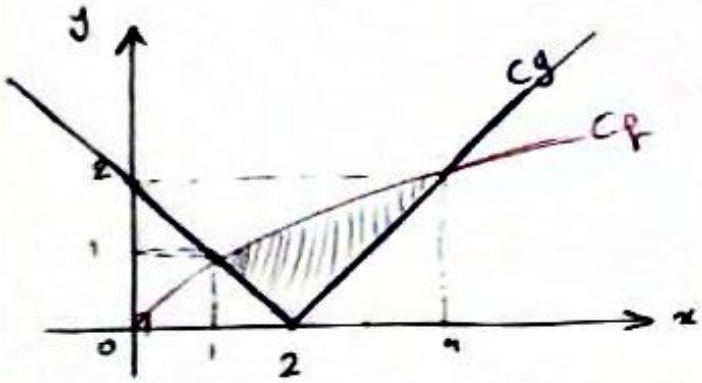
$$S = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)\,dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = (1)^2 - \frac{2}{3}(1)^3 - 0 = \frac{1}{3}$$

مثال (3) : احسب المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = |x-2|$



ملاحظة :

$$g(x) = |x-2| = \begin{cases} -x+2 : x \leq 2 \\ x-2 : x \geqslant 2 \end{cases}$$

على المجال $]-\infty, 2[$ نرسم المستقيم $y = -x+2$

على المجال $]2, +\infty[$ نرسم المستقيم $y = x-2$

نوجد نقاط التقاطع :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = |x-2| \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = x^2 - 4x + 4$ (بتربيع الطرفين مع شرط كل $x \geq 0$)

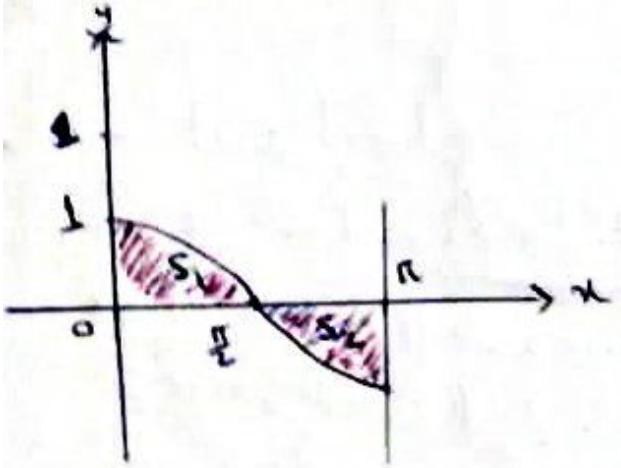
$(x-1)(x-4) = 0$

لما $x = 1$ أو $x = 4$

على المجال $[1,4]$ نجد C_g فوق C_f

مثال (1)

احسب مساحة الشكل المحصور بين منحنى التابع $y = \cos x$ ومحور ox حيث $0 \leq x \leq \pi$



$$S = S_1 + S_2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (1-0) - (0-1) = 1 + 1 = 2$$

$$S = \int_1^4 (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

$$= \int_1^4 \left[\sqrt{x} - |x-2|\right] \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \left[\sqrt{x} - (-x+2)\right] \cdot dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2)) \cdot dx$$

$$= \int_1^2 \left[x^{\frac{1}{2}} + x - 2\right] \cdot dx + \int_2^4 (x^{\frac{1}{2}} - x + 2) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_2^4$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{2} + 2 - 4\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right] + \left[\left(\frac{16}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{2^2} + 4\right)\right]$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{6}\right] + \left[\frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right]$$

$$= \frac{13}{6}$$