



كلية العلوم

القسم : الكيمياء

السنة : الاولى

المادة : رياضيات عامة ٢

المحاضرة : الرابعة / نظري

جدول التكاملات الاساسية

{{ مكتبة A to Z }}

مكتبة A to Z Facebook Group :

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960



## تكامل الدوال الكسرية

ندعو كل دالة من الشكل  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  دالة كسرية حيث  $P(x)$  و  $Q(x)$  كثيرات حدود، فإذا كانت درجة كثيرة الحدود في البسط أكبر أو تساوي درجة كثيرة الحدود في المقام فإننا نقسم البسط على المقام لنحصل على صيغة جديدة للدالة  $R(x)$  بالشكل:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

حيث  $H(x)$  يمثل حاصل القسمة و  $P_1(x)$  باقي

القسمة و هو كثيرة حدود درجته أصغر تماماً من درجة  $Q(x)$  ، بالتالي:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int H(x) \cdot dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} \cdot dx$$

حيث  $\int H(x) \cdot dx$  تكامل كثيرة حدود معروف سابقاً، و  $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} \cdot dx$  تكامل كسر بسيط

## تكامل الكسور البسيطة:

نسمي الأنماط الآتية من الدوال الكسرية بالدوال الكسرية البسيطة:

$$\text{I: } \frac{A}{x-a} \quad \text{II: } \frac{A}{(x-a)^k}; k = 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{III: } \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad \text{IV: } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}; n = 2, 3, 4, \dots$$

حيث  $A, M, N, p, q, a \in \mathbb{R}$  و  $x^2+px+q$  كثيرة حدود لا يملك جذوراً حقيقية أي أن

$$\Delta = p^2 - 4q < 0$$

مميزه عدد سالب تماماً أي:

أولاً: حساب التكامل من الشكل:  $\int \frac{A}{x-a} \cdot dx$

$$\int \frac{A}{x-a} \cdot dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln|x-a| + c$$

مثال:

$$\int \frac{2}{3x+5} \cdot dx = \frac{2}{3} \int \frac{3dx}{3x+5} = \frac{2}{3} \ln|3x+5| + c$$

ثانياً: حساب التكامل من الشكل  $\int \frac{A}{(x-a)^k} \cdot dx$  ;  $k = 2, 3, 4, \dots$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} \cdot dx = A \int (x-a)^{-k} \cdot dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c$$

مثال:

$$\begin{aligned}\int \frac{9}{(3x+2)^7} \cdot dx &= 9 \int (3x+2)^{-7} \cdot dx = \frac{9}{3} \int 3(3x+2)^{-7} \cdot dx \\ &= 3 \frac{(3x+2)^{-7+1}}{-7+1} + c = -\frac{1}{2} \frac{1}{(3x+2)^6} + c\end{aligned}$$

ثالثاً: حساب التكاملات من الشكل:  $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \cdot dx$

حيث  $p^2 - 4q < 0$  و هذا يعني أن كثيرة الحدود  $x^2 + px + q$  لا يمكن تحليلها إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى، و لحل مثل هذه التكاملات نقوم بإتمام المقدار  $x^2 + px + q$  إلى مربع كامل كما يلي:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

نفرض أن  $t = x + \frac{p}{2}$  فيكون  $x = t - \frac{p}{2}$  و بالتالي:  $dx = dt$  و لنضع  $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$

$$a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \text{ و منه إن}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \cdot dx &= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2} \cdot dt = M \int \frac{t}{t^2+a^2} \cdot dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} \\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \cdot dx &= \frac{M}{2} \ln|t^2+a^2| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} \cdot \arctg\left(\frac{t}{a}\right) + c\end{aligned}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \cdot dx = \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctg\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c$$

تمرين: أوجد التكامل  $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5} \cdot dx$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + 5 = (x-1)^2 + 4$$

نفرض أن  $t = x - 1$  فيكون  $x = t + 1$  و بالتالي:  $dx = dt$  نعوض في التكامل:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5} \cdot dx &= \int \frac{2(t+1)+1}{t^2+4} \cdot dt = \int \frac{2t}{t^2+4} \cdot dt + 3 \int \frac{dt}{t^2+4} \\ &= \ln|t^2+4| + \frac{3}{2} \cdot \arctg\left(\frac{t}{2}\right) + c \\ &= \ln|x^2-2x+5| + \frac{3}{2} \cdot \arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\end{aligned}$$

## تفريق الكسور:

لتكن  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  دالة كسرية حيث  $P(x)$  و  $Q(x)$  كثيرات حدود، و درجة كثيرة الحدود في البسط أصغر تماماً من درجة كثيرة الحدود في المقام، بالتالي يمكن كتابة الدالة الكسرية  $R(x)$  على شكل مجموع منته من الدوال الكسرية البسيطة و بالتالي فإن مكاملة أي دالة كسرية تؤول إلى حساب التكامل لكسور بسيطة.

نميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى:  $Q(x)$  تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى و غير مكررة.

أي:  $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$  و نكتب:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} \\ &= \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \end{aligned}$$

حيث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ثوابت عددية تعين بطريقتين إما بتوحيد المقامات ثم حذفها و المطابقة بين طرفي المساواة أو نتبع الطريقة الآتية: لتعيين  $A_k$  نضرب الطرفين بالمقدار  $(x - a_k)$  و نجعل  $x = a_k$ .

تمرين: أوجد التكامل  $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} \cdot dx$

نحلل المقام:  $x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3)$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3}$$

لتعيين  $A_1$  نضرب الطرفين بالمقدار  $x$

$$\frac{7x-5}{(x-2)(x+3)} = A_1 + \frac{x \cdot A_2}{x-2} + \frac{x \cdot A_3}{x+3}$$

و نجعل  $x = 0$  نجد:

$$\frac{7(0)-5}{(0-2)(0+3)} = A_1 + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = \frac{5}{6}$$

لتعيين  $A_2$  نضرب الطرفين بالمقدار  $(x - 2)$  و نجعل  $x = 2$  نجد:  $A_2 = \frac{9}{10}$

لتعيين  $A_3$  نضرب الطرفين بالمقدار  $(x + 3)$  و نجعل  $x = -3$  نجد:  $A_3 = -\frac{26}{15}$  و منه:

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \frac{1}{x-2} - \frac{26}{15} \frac{1}{x+3}$$

و بالتالي:

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} \cdot dx = \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{9}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{26}{15} \int \frac{dx}{x+3}$$

$$\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} \cdot dx = \frac{5}{6} \ln|x| + \frac{9}{10} \ln|x-2| - \frac{26}{15} \ln|x+3| + c$$

الحالة الثانية:  $Q(x)$  تتحلل إلى جداء عوامل جميعها من الدرجة الأولى بعضها مكررة.

في هذه الحالة كل عامل مكرر  $k$  مرة مثل  $(x - a)^k$  يوافق مجموع  $k$  كسر بسيط كما يلي:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

حيث  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  ثوابت عددية لتعيينها نقوم بتوحيد المقامات ثم حذفها و المطابقة بين طرفي المساواة.

تمرين: أوجد التكامل الآتي:  $I = \int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} \cdot dx$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3 \text{ نحلل المقام}$$

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

بتوحيد المقامات ثم حذفها نجد:

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + B \cdot x \cdot (x-1)^2 + C \cdot x \cdot (x-1) + D \cdot x$$

بالإصلاح:

$$x^3 + 1 = (A+B)x^3 + (-3A+C-2B)x^2 + (3A+D-C+B)x - A$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+C-2B=0 \\ 3A+D-C+B=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد  $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$  و منه:

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} \cdot dx = -\int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} \cdot dx = -\ln|x| - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c$$

الحالة الثالثة: عوامل المقام من الدرجة الثانية و غير مكررة.

عندئذ من أجل كل عامل من الدرجة الثانية مثل  $x^2 + px + q$  يوافق كسر بسيط من الشكل:

$$\frac{P(x)}{x^2+px+q} = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

تمرين: أوجد التكامل  $\int \frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9} \cdot dx$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = x^2(x^2 + 4x + 4) - 9 = x^2(x+2)^2 - (3)^2$$

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 &= (x^2 + 2x)^2 - (3)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

$$\frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

بتوحيد المقامات و حذفها و الإصلاح نحصل على:

$$7x^2 + 26x - 9 = (A+B+C)x^3 + (5A+B+2C+D)x^2 + (9A+B-3C+2D)x + 9A-3D-3B$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+B+2C+D=7 \\ 9A+B-3C+2D=26 \\ 9A-3D-3B=-9 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد أن:  $A=1, B=1, C=-2, D=5$

$$\int \frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} \cdot dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-2x+5}{x^2+2x+3} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} \cdot dx \\ = \ln|x-1| + \ln|x+3| - \ln|x^2+2x+3| + \frac{7}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} \cdot dx = \ln \left| \frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3} \right| + \frac{7}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

**الحالة الرابعة:** عوامل المقام من الدرجة الثانية و بعضها مكرر.

عندئذ من أجل كل عامل من الدرجة الثانية مثل  $x^2 + px + q$  مكرر  $k$  مرة يوافق مجموع

$k$  كسر بسيط كما يلي:

$$\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(x^2 + px + q)^k}$$

لتعيين الثوابت العددية نوجد المقامات و نحذفها ثم نقوم بعملية المطابقة.

جدول التكاملات  
الأساسية

①

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad : n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad : x \neq 0$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad 0 < a \neq 1 ; \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \quad ; \quad x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \quad ; \quad x \neq \pi k \quad : k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left( \frac{x}{a} \right) + c \quad ; a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) + c \quad : |x| < |a| \quad ; a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c = \operatorname{argch} \left( \frac{x}{a} \right) + c \quad ; |x| > |a|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C = \operatorname{argsh} \left( \frac{x}{a} \right) + C ; a \neq 0$$

$$\int \operatorname{sh} x \cdot dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + C ; x \neq 0$$

جبرد الوكاملات =  $\frac{1}{x}$



مكتبة  
A to Z