كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

التكامل غير المحدد

تعريف: نسمي الدالة $F(x)$ حيث $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال I، إذا تحقق ما يلي: $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

مثال: الدالة $F(x) = \arcsin x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ لأن:
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;, \forall x \in]-1,1[$

مبرهنة: كل دالة مستمرة على مجال مغلق تملك دالة أصلية على هذا المجال.

ملاحظة: إذا كانت الدالة التي نبحث عن دالتها الأصلية تعاني من انقطاع فإننا ندرس الدالة على المجالات التي تكون مستمرة عليها.

تعريف: لتكن $f(x)$ دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$، عندئذٍ إن أحد الدوال الأصلية لها على هذا المجال يسمى تكاملاً غير محدد لها و نكتب $\int f(x).dx = F(x) + c$ حيث c ثابت اختياري.

الطرق الأساسية في التكامل:

1. الطريقة المباشرة: بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد يمكن حساب التكامل مباشرة برده إلى تكاملات موجودة في جدول التكاملات الأساسية الشهيرة.

أمثلة:

$$I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}.dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}.dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}.dx = \int x^{\frac{1}{2}}.dx + \int x^{-\frac{1}{2}}.dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$$

$$I = \int \frac{x^2}{x^2+1}.dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}.dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}.dx + \int \frac{-1}{x^2+1}.dx$$
$$= \int 1.dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - arctg\, x + c$$

$$I = \int tg^2(x).dx = \int (tg^2(x)+1-1).dx$$
$$= \int (tg^2(x)+1).dx - \int dx = tg(x) - x + c$$

$$I = \int \frac{dx}{x.ln(x)} = \int \frac{\frac{1}{x}}{ln(x)}.dx = ln|ln(x)| + c$$

2. طريقة تغيير المتحول:

تعتمد على إدخال متغير جديد t عوضاً عن x يرتبط معه بالعلاقة: $x=\varphi(t)$، حيث $\varphi(t)$ دالة مستمرة و المشتق الأول لها مستمر أيضاً و عندئذٍ يكون لدينا:

$\int f(x).dx=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt$ نوجد هذا التكامل بدلالة t ثم نبدل t بما يساويها بدلالة x.

أمثلة:

$$I_1=\int e^{x^3}x^2.dx$$

نفرض $t=x^3$ فيكون $dt=3x^2.dx$ و منه $x^2.dx=\frac{1}{3}dt$ ، نعوض في التكامل:

$$I_1=\int e^t.\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int e^t.dt=\frac{1}{3}e^t+c=\frac{1}{3}e^{x^3}+c$$

$$I_2=\int\frac{dx}{3-2x}$$

نفرض أن $t=3-2x$ و منه $dt=-2dx$ أي $dx=-\frac{1}{2}dt$

$$I_2=\int\frac{-\frac{1}{2}dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}ln|t|+c=-\frac{1}{2}ln|3-2x|+c$$

$$I_3=\int\sqrt{3x+1}.dx$$

نفرض $t^2=3x+1$ فيكون $2t.dt=3dx$ و بالتالي $dx=\frac{2}{3}t.dt$

$$I_3=\int t.\left(\frac{2}{3}t.dt\right)=\frac{2}{3}\int t^2.dt=\frac{2}{3}.\frac{t^3}{3}+c=\frac{2}{9}t^3+c$$

$$=\frac{2}{9}\left[(3x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^3+c=\frac{2}{3}\sqrt{(3x+1)^3}+c$$

$$I_4=\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

نفرض أن $t=2x$ فيكون $dt=2dx$ أي $dx=\frac{1}{2}dt$

$$I_4=\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-(2x)^2}}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{t}{3}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)+c$$

3. حساب التكامل بطريقة التجزئة:

لتكن لدينا الدالتان $u(x), v(x)$ القابلتان للاشتقاق حيث المشتق الأول لكل منهما دالة مستمرة على مجال ما، يعطى دستور التكامل بالتجزئة بالعلاقة الآتية:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

أمثلة:

$$I = \int x.ln(x)\,dx$$

نفرض أن $u(x) = ln(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{x}$ و $dv = x.dx$ فيكون $v = \frac{1}{2}x^2$ بالتالي:

$$I = \frac{1}{2}x^2.ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2.\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2.ln(x) - \frac{1}{2}\int x.dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2.ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$$

$$I = \int x.\cos x\,.dx$$

نفرض أن $u(x) = x$ فيكون $du = dx$ و $dv = \cos x\,.dx$ فيكون $v = \sin x$ ومنه:

$$I = x.\sin x - \int \sin x\,.dx = x.\sin x + \cos x + c$$

إن دستور التكامل بالتجزئة يسهل علينا حساب التكامل إذا أحسنا اختيار كل من $u\,, dv$ فمثلاً في التكامل السابق في حال فرضنا $u(x) = \cos x$ و $dv = x.dx$ لحصلنا على تكامل أصعب من التكامل I، لذلك سنصنف الجزء الأكبر من التكاملات في ثلاث مجموعات لكل منها فرضيتها الخاصة، مع التأكيد على ان المجموعات الثلاث لا تشمل كل التكاملات التي يمكن حسابها بطريقة التجزئة.

المجموعة الأولى: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x).e^{\alpha x}.dx \text{ ، } \int P_n(x).\sin\alpha x\,.dx \text{ ، } \int P_n(x).\cos\alpha x\,.dx$$

لحساب هذه التكاملات نفرض $u(x) = P_n(x)$ و نفرض ما تبقى داخل إشارة التكامل dv ثم نعوض بدستور التكامل بالتجزئة.

أمثلة:

$$I = \int (x^2 - 6x + 2)\, e^{3x}.dx$$

نفرض $u(x) = x^2 - 6x + 2$ فيكون $du = (2x-6).dx$ و $dv = e^{3x}.dx$ فيكون $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ نعوض بالدستور:

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}.(x^2 - 6x + 2) - \int \frac{1}{3}e^{3x}.(2x-6).dx$$

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}.(x^2 - 6x + 2) - \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{3x}.(x-3).dx}_{J}$$

نكامل J بالتجزئة أيضاً فنفرض $u = x - 3$ فتكون $du = dx$ و $dv = e^{3x}.dx$ فيكون $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ و منه:

$$J = \frac{1}{3}e^{3x}.(x-3) - \frac{1}{3}\int e^{3x}.dx = \frac{1}{3}e^{3x}.(x-3) - \frac{1}{9}\, e^{3x} + c$$

نعوض في عبارة I نجد:

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}.(x^2 - 6x + 2) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x}.(x-3) - \frac{1}{9}\, e^{3x} + c\right)$$

و بالتالي:

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}.(x^2 - 6x + 2) - \frac{2}{9}e^{3x}.(x-3) + \frac{2}{27}e^{3x} + c'$$

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{90}x + \frac{38}{27}\right)e^{3x} + c'$$

المجموعة الثانية: التكاملات من الشكل

$$\int P_n(x).arctg(x).dx \text{ ، } \int P_n(x).arc\,cos(x).dx \quad \int P_n(x).arcsin(x).dx$$

$$\int P_n(x).ln(x).dx \text{ ، } \int P_n(x).arcotg(x).dx$$

لحساب هذه التكاملات نفرض أن $dv = P_n(x).dx$ و ما تبقى ضمن إشارة التكامل نفرضه $u(x)$

أمثلة:

$$I_1 = \int arcsin(x).dx$$

نفرض $u(x) = arcsin(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ و أن $dv = dx$ فيكون $v = x$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة:

$$I_1 = x.arcsin(x) - \int \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = x.arcsin(x) + \int \frac{-2x.dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_1 = x.arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$I_2 = \int ln(x).dx$$

نفرض نفرض أن $u(x) = ln(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{x}$ و $dv = dx$ فيكون $v = x$ بالتالي:

$$I = x.ln(x) - \int x.\frac{dx}{x} = x.ln(x) - \int dx = x.ln(x) - x + c$$

$$I_3 = \int x.arctg(x).dx$$

نفرض أن $u(x) = arctg(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{x^2+1}$ و $dv = x.dx$ فيكون $v = \frac{1}{2}x^2$

بالتالي:

$$I_3 = v = \frac{1}{2}x^2.arctg(x) - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}x^2.arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}.dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2.arctg(x) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right).dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2.arctg(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctg(x) + c$$

المجموعة الثالثة: التكاملات من الشكل

$$\int e^{ax} \cos bx\,.dx \text{ ، } \int e^{ax} \sin bx\,.dx$$

لحساب هذه التكاملات نفرض أن $u(x)$ هو إما الدالة الأسية أو المثلثية و ما يبقى داخل إشارة التكامل نفرضه dv

مثال: $I = \int e^{2x}.sin(3x).dx$

الحل:

نفرض أن $u(x) = e^{2x}$ فيكون $du = 2e^{2x}$ و نفرض $dv = sin(3x)$ فيكون
$v = -\frac{1}{3}cos(3x)$

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{3}\underbrace{\int e^{2x}\cos 3x\,.dx}_{J}$$

نكامل J بالتجزئة: نفرض أن $u(x) = e^{2x}$ فيكون $du = 2e^{2x}$ و نفرض
$dv = cos(3x)$ فيكون $v = \frac{1}{3}sin(3x)$

$$J = \frac{1}{3}e^{2x}sin(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x}sin(3x)\,.dx = \frac{1}{3}e^{2x}sin(3x) - \frac{2}{3}I$$

نعوض في عبارة I :

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}sin(3x) - \frac{2}{3}I\right)$$

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{9}\,e^{2x}sin(3x) - \frac{4}{9}I$$

$$I + \frac{4}{9}I = -\frac{1}{3}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{9}\,e^{2x}sin(3x)$$

$$\frac{13}{9}I = -\frac{1}{3}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{9}\,e^{2x}sin(3x)$$

$$I = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{9}\,e^{2x}sin(3x)\right) + c$$

$$I = -\frac{3}{13}e^{2x}.cos(3x) + \frac{2}{13}\,e^{2x}sin(3x) + c$$

التكامل الآتي $\int \frac{x}{sin^2(x)}.dx$ ليس من المجموعات السابقة و يحسب بطريقة التجزئة كما يلي:

نفرض $u = x$ فيكون $du = dx$ و $dv = \frac{dx}{sin^2(x)}$ فيكون $v = -cotgx$

$$I = -x.cotgx + \int cotgx\,.dx = -x.cotgx - \int \frac{cosx}{sinx}.dx$$

$$I = -x.cotgx - ln|sinx| + c$$