كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة١

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: أوجد ما يطلب إذا كان لدينا المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}$$

a) $A+B$ ، $A-3$ b) $A.B$ ، A^T ، B^T

c) $3A$ ، $(4A)^T$ ، $5(A+B)$ d) $3(2.B)$ ، $(5+2)A$

الحل:

a)

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+1 & 5+0 & 0+1\\ 2+2 & 2+4 & 3+2\\ 1+3 & 4+5 & 2+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\ 4 & 6 & 5\\ 4 & 9 & 5\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-1 & 5-0 & 0-1\\ 2-2 & 2-4 & 3-2\\ 1-3 & 4-5 & 2-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

(b)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (3)(1)+(5)(2)+(0)(3) & (3)(0)+5(4)+0(5) & (3)(1)+(5)(2+(0)(3) \\ (2)(1)+(2)(2)+(3)(3) & (2)(0)+0(4)+0(5) & (2)(1)+(2)(2)+(3)(3) \\ (1)(1)+(4)(2)+(2)(3) & (1)(0)+(4)(4)+(2)(5) & (1)(1)+(4)(2)+(2)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+10+0 & 0+20+0 & 3+10+0 \\ 2+4+9 & 0+3+5 & 2+4+9 \\ 1+8+6 & 0+16+10 & 1+8+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 20 & 13 \\ 15 & 23 & 15 \\ 15 & 26 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 0 \\ 6 & 6 & 9 \\ 3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$(4A)^T = 4 \cdot A^T = 4\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 16 \\ 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$5(A+B) = 5\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 5 \\ 20 & 30 & 25 \\ 20 & 45 & 25 \end{bmatrix}$$

أوجدنا الحل بالطريقة السابقة

يمكن حل السؤال بطريقة أخرى بالشكل

$$5(A+B) = 5A + 5B = 5\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 25 & 0 \\ 10 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 10 & 20 & 10 \\ 15 & 25 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 5 \\ 20 & 30 & 25 \\ 25 & 45 & 15 \end{bmatrix}$$

(d)

$$3(2 \cdot B) = (3 \cdot 2)B = 6B$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 12 & 24 & 12 \\ 18 & 30 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(5+2)A = 7 \cdot A \quad \text{أو} \quad (5+2)A = 5A + 2A$$

أسهل الحل

$$7 \cdot A = 7\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 35 & 0 \\ 14 & 14 & 21 \\ 7 & 28 & 14 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= (5+2)A = 5A + 2A = 5\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 25 & 0 \\ 10 & 10 & 15 \\ 5 & 20 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 35 & 0 \\ 14 & 14 & 21 \\ 10 & 25 & 14 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني:

ليكن لدينا المصفوفة A و B حيث

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1) أوجد A^T و B^T

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2) أوجد $A \cdot B$ إذا كان ممكناً المصفوفة A و B

$$A(3,3) \quad B(3,2) = (3,2)$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4)(3)+(5)(-1)+(3)(2) & (4)(0)+5(2)+3(1) \\ (2)(3)+(0)(-1)+(1)(2) & (2)(0)+(0)(2)+0(2) \\ (1)(3)+(2)(-1)+(-1)(2) & (1)(0)+(2)(2)+(-1)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12-5+6 & 0+10+3 \\ 6+0+2 & 0+0+1 \\ 3-2-2 & 0+4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ 8 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) أوجد محدد المصفوفة A بطريقة لابلاس:

$$A=\begin{bmatrix}4&5&3\\2&0&1\\1&2&-1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}+&-&+\\4&5&3\\2&0&1\\1&2&-1\end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix}0&1\\2&-1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}$$

$$=4[(0)(-1)-(1)(2)]-5[(2)(-1)-(1)(1)]+3[(2)(2)-(0)(1)]$$

$$=4[-2]-5[-2-1]+3[4-0]=-8+15+12=19$$

4) أوجد المصفوفة A بطريقة ساروس:

$$\begin{vmatrix}4&5&3\\2&0&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&5&3&4&5\\2&0&1&2&0\\1&2&-1&1&2\end{vmatrix}$$

$$=[(4)(0)(-1)+(5)(1)(1)+(3)(2)(2)]-[(3)(0)(1)+(4)(1)(2)+(5)(2)(-1)]=(0+5+12)-(0+8-10)=17+2=19$$

5) أوجد مبين المعد Δ_{23} وقيمته الجبرية؟

$$\Delta_{23}=\begin{vmatrix}4&5\\1&2\end{vmatrix}=8-5=3$$

$$\Delta_{23}=(-1)^{2+3}D_{23}=(-1)(3)=-3$$ قيمته الجبرية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ليكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 8 & 3\\ 4 & 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

المطلوب ايجاد:

1) $F+C$ ، $F-C$ ، $A-D$ ، $A+D$

2) $5A-3D$ ، $2A$

3) $A.B.C$ ، $B.C$ ، $A.B$

4) $C.E$ ، $E.C$

5) $3|B|$ ، $GT-|K|$ ، $|B|$

المثال الثالث: أوجد قيمة المحدد التالي

الحل: باستخدام طريقة ساروس

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

القطر الرئيسي

$$=-[(3)(2)(-1)+(0)(0)(3)+(1)(-1)(1)]$$
$$+[(1)(2)(3)+(3)(0)(1)+(0)(-1)(-1)]$$
$$=(-6+0-1)-(6+0+1)=7-7=-14$$

المثال الرابع:

أوجد قيمة المحدد $|B|$ بالنسبة للعمود الثالث

الحل: إن الإشارات المرافقة لعناصر العمود الثالث هي:

$$\begin{matrix}+\\ -\\ +\end{matrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$ أي:

$$|B| = +(-5)A_{13} + (4)A_{23} + (2)A_{23}$$

$$|B| = -5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -5[(-2)(1)-(1)(5)] - 4[(1)(1)-(3)(5)] + 2[(1)(1)-(3)(-2)]$$

$$= -5[-2-5] - 4[1-15] + 2[1+6] = (-5)(7) - (4)(-14) + (2)(7)$$

$$= 35 + 56 + 14 = 105$$

ملاحظة: أوجد قيمة المحدد $|A|$ بالنشر وفق العمود الأول:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

التمرين الخامس: طبق العمليات التالية:

$$K_{21}(-2),\ K_{2}(3),\ K_{13},\ H_{12},\ H_{32}(2),\ H_{3}(-1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$ ...

الحل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A=\begin{bmatrix}1&4&-1\\2&0&2\\3&5&3\end{bmatrix}\xrightarrow{H_3(-1)}\begin{bmatrix}1&4&-1\\2&0&2\\-3&-5&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{H_{32}(2)}\begin{bmatrix}1&4&-1\\2&0&2\\1&-5&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{12}}\begin{bmatrix}2&0&2\\1&4&-1\\1&-5&+1\end{bmatrix}\xrightarrow{K_{13}}\begin{bmatrix}2&0&2\\-1&4&1\\+1&-5&1\end{bmatrix}\xrightarrow{K_2(3)}\begin{bmatrix}2&0&2\\-1&12&1\\1&-15&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{K_{21}(-2)}\begin{bmatrix}2&-4&2\\-1&14&1\\1&-17&1\end{bmatrix}$$

التمرين السادس: ليكن لدينا المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$ أوجد مقلوب المصفوفة (A^{-1}) بطريقة المصفوفة المساعدة.

الحل نطبق قانون حساب مقلوب مصفوفة وهو:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left[(A)\right]$$ ← المصفوفة المساعدة

يجب أن تكون المصفوفة A نظامية أي $|A|\neq 0$

لكي يكون A^{-1} موجود نوجد أولاً محدد المصفوفة $|A|$ بالنشر

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&1\\-1&2&1\\1&0&2\end{vmatrix}\begin{matrix}+&-&+\\ \end{matrix}=+2\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1&2\\1&0\end{vmatrix}$$

$$=+2[0-0]-0[0-1]+1[0-2]=0-0-2=-2\neq 0$$

إذاً المصفوفة نظامية ويمكن إيجاد مقلوب المصفوفة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ نساعدنا لإيجاد المصفوفة المجاورة

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} +(0-0) & -(0-0) & +(0-2) \\ -(0-1) & +(0-1) & -(2+1) \\ +(0-2) & -(0-0) & +(4-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: يمكن البرهان للطالب التأكد من أن $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ وذلك بإجراء عمليات الضرب بنفسه

انتهت الحلقة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة