كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة١

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التحويلات الأولية للمصفوفات:

نرمز عن مبادلة السطر رقم i بالسطر رقم j بالرمز Hij وعن ضرب عناصر السطر رقم i بالعدد a بالرمز Hi(a) وعند ضرب عناصر السطر رقم i بالعدد a وإضافته إلى عناصر السطر رقم j بالرمز Hij(a)

مثال:

أوجد المصفوفات A، B، B' الناتجة عن التحويلات التالية بالترتيب H1,3 ، Hi(2) ، Hi,2(3)

$$A \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A' \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{Hi(2)} B \begin{pmatrix} 4 & -8 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \xrightarrow{Hi(2)(3)} B \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 6 & -11+8 & 6 & \end{pmatrix}$$

النتيجة نقول عن مصفوفتين A، B أنهما متكافئتان إذا نتجت إحداهما عن الأخرى بإجراء عدد من التحويلات الأولية بشرط أن تكون من نفس المرتبة

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&3\\2&3&-1\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow[H13(-2)]{H12(-2)} \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-4&1\\0&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H23\left(-\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&1\\0&0&-\frac{13}{4}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H12(-2)]{H13(-1)} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&-\frac{13}{4}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H23\left(\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&-\frac{13}{4}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H3\left(\frac{-4}{13}\right)]{H2\left(-\frac{1}{4}\right)} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

E و A متكافئان لأنه يمكن إجراء عدد من التحويلات السطرية أو العمودية انتقلنا من A إلى E

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نستنتج ما يلي:

التحويلات الأولية ممكنة بالنسبة للأعمدة ونرمز لها بـ K

1" Kij تبديل بين العمودين i و j

2" Ki(a) جذب عناصر العمود i بـ a

3" Kij(a) جذب عناصر العمود i بـ (a) وجمعه مع عناصر العمود j

ملاحظة: $A.A^{-1} = E$

إذا أجرينا تحويلات أولية على أسطر وأعمدة A و E معاً حتى نصل A لمصفوفة واحدية عندئذٍ المصفوفة E الجديدة هي مقلوب (معاكس) A وتسمى هذه الطريقة بطريقة (غاوس جوردان) لإيجاد مقلوب مصفوفة.

مثال:

أوجد معكوس المصفوفة الآتية باستخدام طريقة غاوس جوردان:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} H^{*}_{12(2)} \\ H^{*}_{13(-3)} \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$H_{23} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\xrightarrow{H_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{K_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{K_{23}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_{2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

ولاحظة: 1 أوجد معكوس A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

2 أوجد معكوس A إذا علمت أنّ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

رتبة المصفوفة: ملاحظة الرتبة غير المرتبة:

تعريف رتبة المصفوفة:

تعرف رتبة A بأنها مرتبة أكبر مصفوفة جزئية مربعة من A محددها غير معدوم

طرق إيجاده:

1) نرمز لرتبة المصفوفة بالرمز $r(A)$ وهي عدد طبيعي موجب أكبر تماماً من الصفر إذا كانت A من الرتبة n وكان $\det(A)=n$ وكان $r(A)=n$ أما إذا كان $\det(A)=0$ نبحث عن مصفوفة أقل مرتبة ومحددها غير معدوم فتكون رتبة A من مرتبة المصفوفة الجزئية التي محددها غير معدوم.

مثال: لتكن A المصفوفة:

أوجد رتبة A:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&4&5\\6&5&1\end{pmatrix}_{3\times3}$$

$$\det(A)=|A|=0 \Rightarrow r(A)\neq 3$$

مثال: لتكن A المصفوفة أوجد الرتبة لها:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&-2&-4\\4&0&-5\end{pmatrix}_{3\times3}$$

$$\det(A)=|A|=0 \Rightarrow r(A)\neq 3$$

نبحث عن مصفوفات من الرتبة 2×2 ومحددها غير معدوم:

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&-2\end{vmatrix} \text{ أو } \begin{vmatrix}3&-2\\4&0\end{vmatrix} \text{ أو } \begin{vmatrix}2&-1\\-2&-4\end{vmatrix} \text{ أو } \begin{vmatrix}1&2\\4&0\end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow det = -2-6 = -8 \neq 0$$

$$r(A) = 2$$

يكافئ إيجاد مصفوفة جزئية محددها غير معدوم

ملاحظة:

ليس من الضروري أن يكون المصفوفة مربعة بالنسبة للرتبة أما المحدد لا يجوز إلا عن المصفوفة المربعة.

مثال: أوجد رتبة A

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

نأخذ أكبر مصفوفة مربعة منها

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow det(A) = 8 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

خصائص رتبة المصفوفة:

1) إذا كانت A مصفوفة مربعة نظامية فأن $det \neq 0$ ورتبتها تساوي $r(A) = n$

2) اذا كانت A مصفوفة مستطيلة عدد أسطرها ≠ عدد أعمدتها فإن $1 < r(A) \leq \min(m,n)$

3) اذا كانت A مصفوفة صفرية ⇐ الرتبة تساوي الصفر دائماً

4) لا تتغير رتبة مصفوفة إذا أضفنا أو طرحنا إلى أسطرها أو أعمدتها أسطر أو عمود أو اجمع عناصره أصفار.

5) محدد أي مصفوفة أحد الأسطر أو الأعمدة كل عناصره أصفار ⇐ رتبة المصفوفة لا تتغير

6) إذا كانت A و B مصفوفتان متكافئتان كانت $r(A) = r(B)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الطريقة الثانية لإيجاد رتبة مصفوفة:

تعتمد هذه الطريقة على التحويلات الأولية بأن تحوّل المصفوفة لمصفوفة مدرجة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

عندئذ رتبة a هي عدد الأسطر الصفرية

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

عدد الأسطر غير الصفرية $= 3$

$$r(a) = 3$$

نأخذ أكبر مصفوفة مربعة فيها

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$8 \neq 0 \Rightarrow r(a) = 3$$

خصائص رتبة مصفوفة

إذا كانت (a) مصفوفة مربعة نظامية فإن $\det \neq 0$

ورتبتها $=$ ~~رتبتها~~ $r(a) = n$ رتبتها

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}_{4\times 4}$$

$$\xrightarrow{H41(1)}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H23(-4)}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H34}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H23(-1)}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z