كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : فيزياء عامة١

المحاضرة : الرابعة/نظري/د.خديجة الحسن

الاهتزازات التوافقية المتخامدة Damped Harmonic Motions

حتى الآن نحن نفترض عدم وجود قوى معيقة للحركة تؤثر على المهتز كقوى الاحتكاك وأن المهتز يخضع لقوة مرنة أو شبه مرنة يؤدي بنتيجتها المهتز حركة توافقية بسيطة، غير متخامدة بسعة ثابتة $A = const$ كحركة ثقل معلق بنابض أو كحركة نواس بسيط بسعات صغيرة دون احتكاك الحقيقة لا يمكن لمهتز أن يحافظ على اهتزازته إلى الأزل وإنما تتناقص سعة اهتزازه تدريجياً إلى الصفر بنتيجة الاحتكاك الذي لابد منه، فأي جسم واقعي يخضع إلى قوى مقاومة تؤثر عليه من قبل الوسط المحيط فتعيق حركته وتؤدي إلى تناقص طاقته الكامنة، متحولة إلى شكل آخر من أشكال الطاقة، يتبدد في الوسط المحيط، ووفقاً للعلاقة $E = \frac{1}{2}kA^2$ يترافق تناقص الطاقة الكلية بتناقص السعة وتصبح الاهتزازة اهتزازة متخامدة. وغالباً يظهر الاحتكاك من مقاومة الهواء أو قوى داخلية.

تعتمد قيمة قوة الاحتكاك عادة على سرعة الجسيمة، ومن أجل السرعات الصغيرة تتناسب قوة المقاومة مع السرعة تناسباً خطياً من الدرجة الأولى وتتجه باتجاه معاكس لها أي أن :

$$F_r = -r.\frac{dx}{dt}$$

حيث أن r ثابت موجب يسمى عامل مقاومة الوسيط. يتعلق بخصائص الوسط وشكل مقاييس لإيجاد معادلة حركة المهتز التوافقي البسيط المتخامد، نطبق قانون نيوتن الثاني

$$F = ma = m.\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

حيث تتألف F من مجموع كل من قوة الإرجاع (المرونة) $[-r.\frac{dx}{dt}]$ (وقوة الارجاع $(-kx)$ ومنه:

$$F = m.a$$

$$-kx + r.\frac{dx}{dt} = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

أو بالشكل:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\beta.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2)$$

حيث أن: $\beta = \frac{r}{2m}$ ثابت له أبعاد التردد ويسمى عامل التخامد.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ التردد الزاوي للاهتزازات الحرة في حال انعدام التخامد ويسمى التردد الذاتي.

تمثل المعادلة 2 المعادلة التفاضلية للحركة المتخامدة لأية منظومة ميكانيكية بدلالة ترددها الزاوي ω_0 وعامل تخامدها β.

يمكن إدخال متحول جديد للمعادلة 2 يرتبط مع x بالعلاقة: (3) $\quad x = z.e^{-\beta t}$

وبتعويض x من 3 ب (2) حيث أن حدود العلاقة 2 تصبح بالشكل:

$$\boldsymbol{2\beta\frac{dx}{dt}} = \left(2\beta\frac{dz}{dt} - 2z\beta^2\right)e^{-\beta t}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2}} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} - \beta\frac{dz}{dt} - \beta\frac{dz}{dt} + z\beta^2\right)e^{-\beta t} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} - 2\beta\frac{dz}{dt} + z\beta^2\right)e^{-\beta t}$$

$$\boldsymbol{\omega_0^2.x} = \omega_0^2.z.e^{-\beta t}$$

نعوض حدود العلاقة (2) بعد أن عوضنا قيم x ومشتقاتها من (3):

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2).z = 0 \qquad (5)$$

وباعتبار أن:

$$\omega^2 = (\omega_0^2 - \beta^2)$$

نجد:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2.z = 0 \qquad (6)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية للمتحول z يعطى حلها بالعلاقة:

$$z = A_0Cos(\omega t + \varphi)$$

حيث أن A_0و φ مقداران ثابتان يتعينان من شروط بدء الحركة.

ودور هذه الحركة يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$ دور الحركة التوافقية المتخامدة

نلاحظ من علاقة دور الحركة المتخامدة (7) أنه أكبر من دور الاهتزاز الذاتي لأن $\omega < \omega_0$.

ولنحل الآن بعض المسائل في اطار الحركة الاهتزازية التوافقية:

اهتزازة توافقية بسيطة سعتها 50mm ودورها 4 s وطورها الابتدائي $\frac{\pi}{4}$.

أوجد معادلة الحركة الاهتزازية التوافقية البسيطة , ثم أوجد انزياح نقطة عند وضع توازنها في اللحظتين : $t = 0$; $t = 1.5\ s$.

الحل :

لإيجاد معادلة الحركة الاهتزازية وفق معطيات المسألة , نكتب المعادلة العامة للحركة الاهتزازية التوافقية البسيطة باعتماد أحد الشكلين التاليين :

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad ; \quad x = A\sin(\omega t + \phi_0)$$

يرتبط التردد الزاوي للحركة الاهتزازية بدورها بالعلاقة

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{Rad.S}^{-1}$$

نعوض في الشكل العام لمعادلة الحركة الاهتزازية :

$$x = 50\text{Sin}(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})\text{mm}$$

انزياح النقطة عن وضع توازنها

$$t = 0 \Rightarrow x = 50\text{Sin}(\frac{\pi}{4}) = 50 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 35.35\text{mm} \quad \&$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 50\text{Sin}(\frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}) = 50\text{Sin}(\pi) = 0$$

1-9-4 :

ليكن الطور البدائي لحركة توافقية بسيطة مساو للصفر ، خلال أي جزء من الدور تصبح سرعة النقطة المهتزة نصف السرعة العظمى ؟

الحل :

إذا كان الانزياح يعطى بالعلاقة :

$$x = \sin(\omega t + \phi_0)$$

فتعطى السرعة بالعلاقة :

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t)$$

أما السرعة العظمى فتساوي :

$$\upsilon_{max} = \omega A$$

وتصبح السرعة تساوي السرعة العظمى عندما

$$\omega A \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\omega A \;\Rightarrow\; \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\cos(\frac{2\pi}{T}t) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{T}t = \text{Arc}\cos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; t = \frac{T}{6}\ S$$

1-9-5 :

نقطة مادية , كتلتها 2 kg ومعادلة حركتها

$$x = 0.1\text{Sin}(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})\ m$$

أوجد المعادلة التي تصف تغير القوة المؤثرة في النقطة وأوجد قيمة القوة العظمى .

الحل :

تعطى القوة المرجعة بالعلاقة :

$$F = -kx \Rightarrow F = -k\left[0.1\sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})\right] =$$

$$F = 0.1k\sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})$$

ولكن

$$k = m\omega^2 = 2\times\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 0.31\ Nm^{-1}$$

ومنه نحصل على القوة المتغيرة توافقياً

$$F = 0.1\times 0.31\sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}) = 0.031\sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})\ \ N$$

والقوة العظمى تساوي 0.031 N .

1-9-6 :

إذا كانت الطاقة الكلية لجسم يقوم بحركة توافقية بسيطة تساوي 3×10^{-5} joul والقوة العظمى المؤثرة على الجسم تساوي 1.5×10^{-3} N ,اكتب معادلة حركة الجسم المهتز إذا كان دور الاهتزاز يساوي 2 S والطور البدائي 60° .

الحل :

الشكل العام لمعادلة حركة الجسم المهتز يمكن أن يأخذ الشكل التالي :

$$x = A\sin(\omega t + \phi_0)$$

نوجد ثوابت الاهتزازة A و ω .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ Rad.S^{-1}$$