كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : فيزياء عامة١

المحاضرة : الثالثة/نظري/د.خديجة الحسن

الاهتزازات Oscillations

1-1الاهتزازات Oscillations:

من المعلوم أن أية حركة تكرر نفسها في فواصل زمنية متساوية تسمى حركة دورية.

وسنرى أنه يمكن التعبير دائما عن انزياح جسيمة تقوم بحركة دورية بتابع جيبي أو تجيبي. وبما أن مصطلح " توافقي "Harmonic" يطلق على المقادير الجبرية المتضمنة توابع جيبية لذا يطلق دائماً على الحركة الدورية الموصوفة بتابع جيبي تسمية الحركة التوافقية.Harmonic motion

إن الجسيمة التي تقوم بحركة دورية ذهاباً وإياباً على نفس المسار هي جسيمة مهتزة وندعوها ببساطة " المهتز".

إن العالم من حولنا مليء بالحركات الاهتزازية كاهتزازات دولاب التوازن في الساعة واهتزازات وتر الكمان، اهتزاز كتلة معلقة بخيط، اهتزازات النوابض، اهتزاز الذرات في الجزيئات أو في الشبكة البلورية للأجسام الصلبة اهتزاز جزيئات الهواء كما في حالة الموجة الصوتية المنتشرة بواسطتها وكذلك اهتزازات الحقلين الكهربائي E والمغناطيسي H المكونين للموجة الكهرومغناطيسية كانتشار الضوء في الخلاء أو في الأوساط المختلفة.

تصادف في حياتنا اليومية كثيراً من الأجسام المهتزة التي لا تتحرك ذهاباً وإياباً بشكل مستمر على الدوام في حيز محدد بين نهايتين مثبتتين تماماً لأن هناك قوى تعاكس الحركة تعمل على تبديد طاقة الحركة الاهتزازية تدعى قوى الاحتكاك وهي التي تؤدي إلى تخامد الحركة الاهتزازية ..... وهكذا نرى في نهاية المطاف توقف وتر الكمان عن الاهتزاز وتوقف النواس عن التأرجح تدعى مثل هذه الحركات حركات توافقية متخامدة.

كما أننا لا نتمكن من تفادي وجود الاحتكاك في الحركات الدورية للأجسام العادية, وغالباً ما يتم التغلب على تأثير التخامد في المنظومات المهتزة بدعم المنظومات بطاقة خارجية تكافئ الطاقة الضائعة بالاحتكاك. وهذا ما يجري تطبيقه في بعض المنظومات المهتزة كبندول الساعة الحائطية ودولاب التوازن في ساعة اليد حيث تتحرك كما لو أنها لا تتخامد.

لا يقتصر الاهتزاز على المنظومات الميكانيكية, فأمواج الراديو والأمواج الميكروية والضوء المرئي جميعها عبارة عن اهتزاز كل من متجهتي الحقلين الكهربائي والمغناطيسي . بالرغم من الاختلاف الجوهري بين ما ذكر من الاهتزازات الميكانيكية والأمواج الكهرومغناطيسية فهي متشابهة, ويقوم هذا التشابه أساساً على حقيقة أن كل من الاهتزازت الميكانيكية والاهتزازات الكهرومغناطيسية توصف بذات المعادلات الرياضية الرئيسية.

تتميز الحركات الاهتزازية الدورية بزمن دوري يسمى التدور ويعترف دور الحركة التوافقية T بالزمن اللازم لإتمام دورة كاملة أي هزة كاملة ذهابا وإيابا.

أما تردد الحركة التوافقية f هو عدد الهزات الكاملة (الدورات في واحدة الزمن لذا يرتبط التردد بالدور بالعلاقة التالية: $\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}}$

يقدر التردد في جملة الوحدات الدولية SI بعدد الدورات في الثانية أو الهرتز ويرمز له بالرمز (HZ) .

يعرفُ الموضع الذي لا توجد فيه قوة تؤثر على الجسم المهتز بانه موضع توازن الجسم المهتز.

أما الانزياح (Displacement قد يكون خطياً أو زاوياً) فهو بعد الجسم المهتز (خطياً كان أو زاويا) عن موضع توازنه في لحظة زمنية ما.

من المفيد أن نذكّر أن:

الجسيمة المهتزة تمتلك طاقة حركية K وطاقة كامنة مرونية U في كل نقطة من مسارها الاهتزازي (أي في كل لحظة زمنية) وبالتالي تكون الطاقة الميكانيكية الكلية للمهتز $E = K + U = Const$ وهي مقدار ثابت مالم يكن هنالك احتكاك.

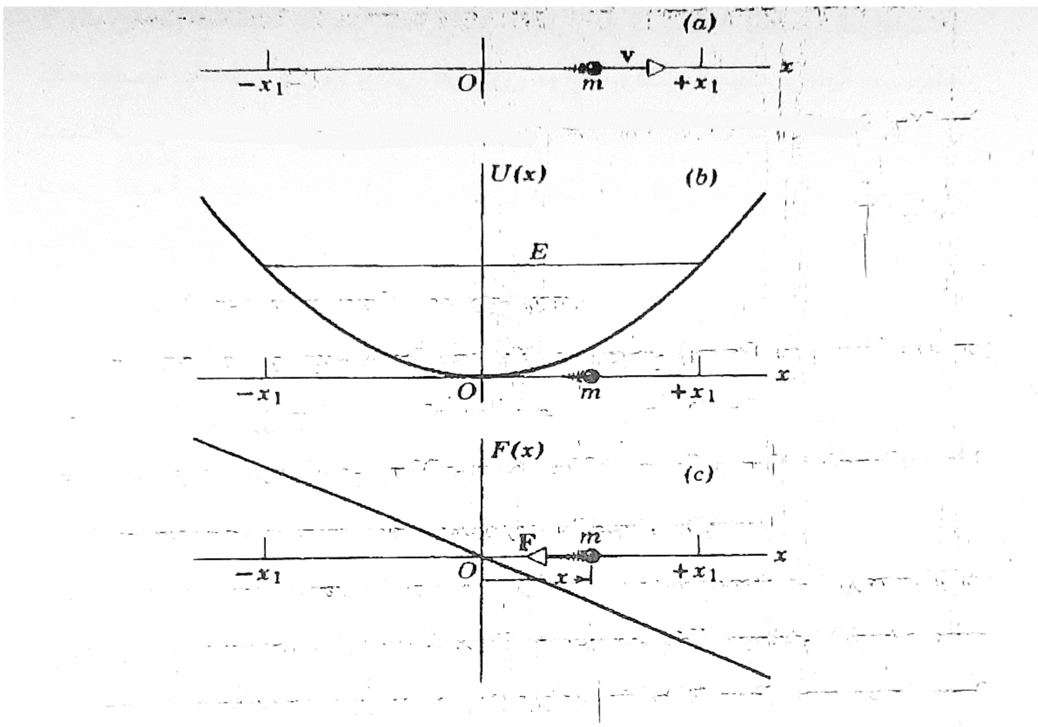
المهتز التوافقي البسيط :the simple harmonic oscillator

لنعتبر جسيمة مهتزة ذهابا وإيابا بطاقة كامنة $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$

حيث K ثابت والقوة المؤثرة على الجسيمة لتحركها تعطى بالعلاقة:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d\left(\frac{1}{2}Kx^2\right)}{dx} = -Kx$$

ويعبر عن تغيرات F و U بالشكلين التاليين:



تدعى القيمة العظمى للانزياح . (x) بالشكل والتي تؤخذ دوماً موجبة سعة الحركة الاهتزازية البسيطة (Amplitude) وتعرف المعادلة $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$ تعبيراً جبريًا لطاقة النابض (الزنبرك) المثالي الكامنة إن كان مشدوداً أم كان مَضغُوطاً بالمسافة x وَتَعَين القوة المبذولة لشد أو ضغط النابض المثالي بالعلاقة

$$F(x) = -Kx$$

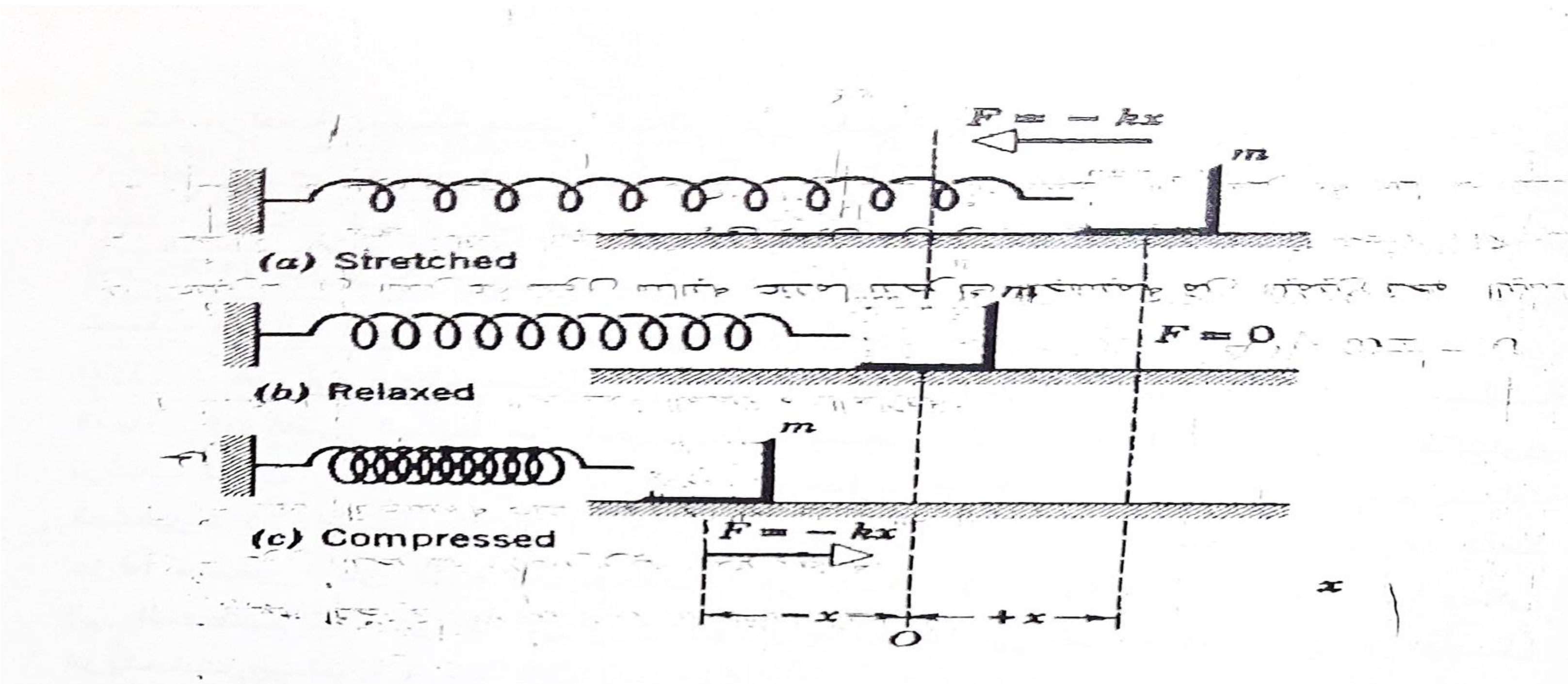
حيث دعي الثابت K في هذه الحالة ثابت قوة النابض .

لذلك يعتبر الجسم ذي الكتلة m المربوط بالنهاية الحرة لنابض مثالي مثبت من نهاياته الأخرى, ثابت قوته ل ويتحرك بحرية على سطح أفقي دون احتكاك مثالاً للمهتز التوافقي البسيط, كما يوضح الشكل لاحظ أن هناك

وضع توازني عندما يكون النابض بوضع الاسترخاء كما في الشكل (3-1) حيث لا يخضع الجسم إلى قوة إذا أزيح إلى اليمين مثلاً مسافة x كما في الشكل (13-a) فإن القوة التي يؤثر فيها النابض على الجسم نحو اليسار قوة) إرجاع (النابض) تعطى بالعلاقة $F(x) = -Kx$

أما إذا أزيح الجسم إلى اليسار كما في الشكل (3-1) ينضغط النابض وتظهر فيه قوة مرجعة تؤثر في الجسم تحو اليمين وتعطى أيضاً بالعلاقة $F(x) = kx$ تكون القوة في كلتا الحالتين قوة مرجعة, تعمل لتسريع الجسم باتجاه موضع

التوازن وبذا تكون حركة الجسم المهتز حركة توافقية بسيطة.



الشكل (3-1) : حركة نابض مثالي على طاولة أفقية دون احتكاك.

<u>ويجب الآن إيجاد المعادلة التفاضلية</u> التي توصف الحركة الاهتزازية للمهتز التوافقي البسيط.

من تطبيق قانون نيوتن الثاني $F = ma$

$$-k.x = m.a$$

$$-k.x = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية تصف حركة المهتز السابق أي انها تصف الحركة التوافقية البسيطة بغض النظر عن طبيعة المهتز، وسنتعرف على حل هذه المعادلة في الفقرة التالية.

الحركة الاهتزازية التوافقية:

لنحل الآن معادلة حركة الهزاز التوافقي البسيط:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad (*)$$

وذلك على اعتبار أن كل جسم كتلته m ويخضع لتأثير القوة $F(x)=-Kx$ سيخضع لهذه المعادلة.

وأن المقدار $\frac{d^2x}{dt^2}$ يمثل المشتق الزمني الثاني لمطال حركة الجسم المهتز ويعبر عن تسارع هذا الجسم

فيكون من واجبنا إيجاد التابع $x(t)$ الذي يحقق هذه المعادلة..

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \qquad (1)$$

ومن المعلوم من الخصائص الرياضية لتابع الساين أو الكوساين أنه يحقق حلاً تجريبياً للمعادلة السابقة له الشكل التالي

الموضع $$x=X_m.\cos(\omega t+\varphi_0)$$

وبالاشتقاق مرتين بالنسبة للزمن

السرعة الخطية $$\frac{dx}{dt}=-\omega X_m.\sin(\omega t+\varphi_0)$$

التسارع $$\frac{d^{2x}}{dt^2}=-\omega^2X_m.\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (2)$$

نعوض 2) ب (1) فنجد:

.

.

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

وعندها يكون التابع

$$x=X_m.\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (3)$$

هو حل لمعادلة المهتز التوافقي البسيط.

نلاحظ أن الثابتين X_m و φ_0 غير معينين وعليه فإن أي اختيار لهذين الثابتين سيحقق المعادلة (*) وبناءً عليه يوجد تنوع واسع للحركات الاهتزازية التي يمكن أن يؤديها المهتز.

نلاحظ من التابع *(3)* أنه كلما زدنا الزمن بمقدار $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ فإن التابع سيكرر نفسه وبالتالي فإن المقدار $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ يمثل دور الحركة الاهتزازية للمهتز التوافقي البسيط.

$$T = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 2\pi\sqrt{m/k}$$

ونلااحظ أن جميع الحركات الاهتزازية المعطاة بالعلاقة (*) تمتلك دور الاهتزاز ذاته وهو يتعلق بكتلة المهتز m وثابت قوة النابض k فقط.

كما نعبر عن تواتر اهتزاز الحركة التوافقية البسيطة بالعلاقة:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

الطاقة الميكانيكية والحركية والكامنة للمهتز التوافقي البسيط:

1-استنتاج علاقة الطاقة الكلية للمهتز البسيط باعتباره نواس مرن:

$$E = U + K$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad ; x = A.cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$K = \frac{1}{2}m.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad ; \frac{dx}{dt} = -\omega.A.sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (*)$$

وبما أن: $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

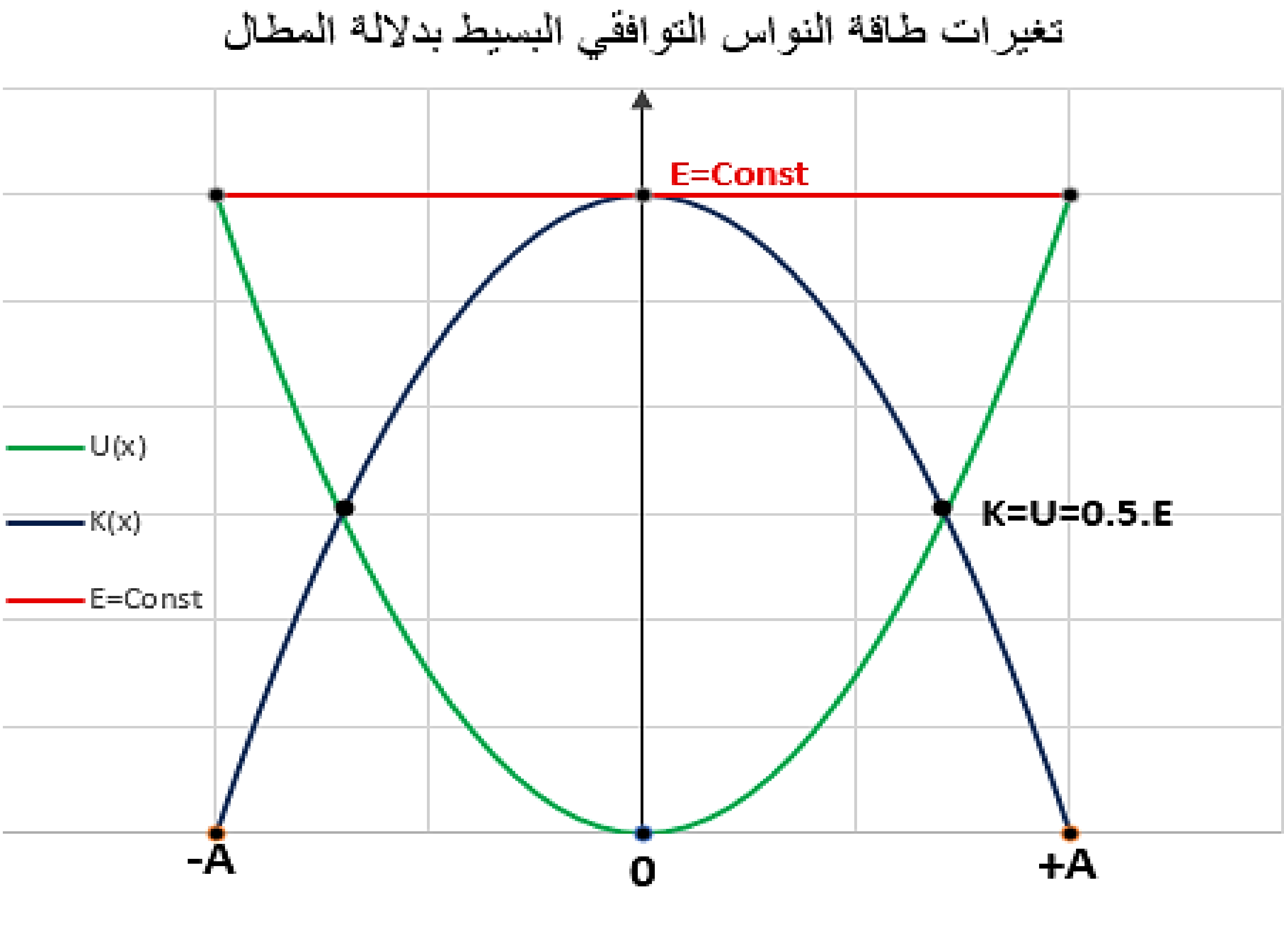
بالتعويض في (*) نجد:

$$E = \frac{1}{2}k.A^2$$

أيضاً نجد: $E = \frac{1}{2}mV_m^2$

حيث أن V_m أعظم قيمة لتابع السرعة (السرعة العظمى طويلةً).

2-رسم Kو U بدلالة x



3- اشرح تغيرات K و U؟

4- استنتاج سرعة الهزاز التوافقي عند كل موضع للمهتز:

بما أن $\mathrm{E = U + K}$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

نقسم الطرفين على $\frac{1}{2}m$ ونعزل السرعة:

$$\frac{k}{m}A^2 = \frac{k}{m}x^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

وهي علاقة السرعة بدلالة مطال حركة الهزاز التوافقي.

1-5- أمثلة محلولة

هامة ٧١٢

1-5-1

يمتط النابض الأفقي في الشكل (1-3) مسافة 7.62 cm عن مركز توازنه عندما تؤثر فيه قوة تساوي 3.34 N . بعد ذلك يربط بنهاية النابض الحرة جسم كتلته 0.331 kg ويسحب مسافة 10.16 cm عن وضع التوازن على طاولة أفقية ملساء , ثم يحرر الجسم بعدئذ فينجز حركة توافقية بسيطة .

1- ما هو ثابت قوة النابض ؟

2 – ما هي القوة التي يؤثر بها النابض على الجسم ؟

3 – ما هو دور الاهتزاز وما هو تردده وترددم الزاوي بعد تحرير الجسم؟

4 – ما هي سعة الاهتزاز ؟

5 – ما هي السرعة العظمى وما هو التسارع الأعظمي للجسم المهتز؟

6 – احسب كل من السرعة والتسارع وكذلك الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للجسم المهتز عندما ينتقل ~~منتصف الطريق~~ اعتباراً من وضعه البدائي باتجاه مركز توازن الحركة.

7 – احسب الطاقة الكلية للمنظومة المهتزة.

8 – ما انزياح الجسم كتابع للزمن ؟

الحل :

1 – تسبب القوة 3.34 N انزياح الجسم مسافة تساوي 7.62 cm , عند ذلك

$$k = \frac{F}{x} = \frac{3.34\,\mathrm{N}}{7.62\times10^{-2}\,(\mathrm{m})} = 43.83\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

2– بعد ربط الجسم ذي الكتلة 0.331 kg بالنابض الأفقي وشده مسافة 10.16 cm يتولد في النابض قوة مرجعة تحاول إعادة الجسم باتجاه مركز

التوازن , تساوي :

$$F=-kx=43.83\,Nm^{-1}\times10.16\times10^{-2}\,m$$

$$F=4.45\,N$$

تدل الإشارة السالبة على أن قوة إرجاع النابض تعاكس جهة الانزياح.

3- بعد إفلات الجسم سيقوم بحركة توافقية بسيطة دورها :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.331kg}{43.83\,Nm^{-1}}}=0.546\ s$$

والتردد الموافق

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.456}=1.83\,H_z$$

ما الترددا الزاوي

$$\omega=2\pi\nu=11.5\ \frac{Rad}{sec}$$

4- لإيجاد سعة الاهتزاز , نعلم أن الانزياح الأعظمي يوافق صفر الطاقة الحركيه وقمة الطاقة الكامنة . وهذه الشروط البدائية قبل ترك الجسم , لذلك السعة هي الانزياح الابتدائي والذي يساوي :

$$A=10.16\ cm$$

5- توجد السرعة العظمى من المعادلات (1-13) :

$$\upsilon_{max}=\omega A=\frac{2\pi}{T}A$$

$$\upsilon_{max}=\frac{2\pi}{0.546}10.16\times10^{-2}=1.17\,ms^{-1}$$

تظهر السرعة العظمى عند مرور الجسم في وضع التوازن x=0 . يتم بلـــوغ هذه القيمة مرتين خلال كل دور , فتساوي السرعة $-1.17\,ms^{-1}$ عندما يمر

الجسم في الموضع $x=0$ بعد تحرره وتساوي $+1.17\,ms^{-1}$ عندما يمر الجسم في الموضع $x=0$ عند الرجوع ليتم هزة كاملة (خلال دور) .

– يمكن حساب التسارع الأعظمي من المعادلات (13-1) :

$$a_{max} = \omega^2 A = \left(\frac{k}{m}\right)A$$

$$a_{max} = \frac{43.83}{0.331}\times 10.16\times 10^{-2} = 13.45\,ms^{-2}$$

يظهر التسارع الأعظمي عند نهايتي المسار , حيث $x = \pm A$ و $\upsilon = 0$.

من ثم $a_{max} = -13.45\,ms^{-2}$ عند $x = +A$ و $a_{max} = +13.45\,ms^{-2}$ عند $x = -A$ ومنه فإن التسارع والانزياح يتعاكسان بالاتجاه.

6– عندما يكون الجسم في منتصف الطريق بين نقطة البدء ومركز الحركة فإن : $x = \frac{A}{2} = \frac{10.16}{2} = 5.08\,cm = 0.508\,m$ ولذا من المعادلة :

$$\upsilon = -\frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\upsilon = -\frac{2\pi}{0.546}\sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} = -\frac{2\pi}{0.546}A\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\upsilon = -1.01\,ms^{-1}$$

يعطى التسارع بالعلاقة :

$$a = -\frac{k}{m}x = -\frac{43.83}{0.331}\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$= -\frac{43.83}{0.331}\left(\frac{10.16\times 10^{-2}}{2}\right) = -6.73\,ms^{-2}$$

أما الطاقة الحركية فتساوي :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 0.331 \times (1.01)^2 = 0.17 \text{ joul}$$

والطاقة الكامنة تساوي :

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} 43.83 \left(\frac{10.16 \times 10^{-2}}{2}\right)^2 = 0.0565 \text{ joul}$$

7- في الحركة الاهتزازية التوافقية البسيطة تكون الطاقة الكلية محفوظة وهـذا يعني أن قيمتها تبقى ثابتة في أية لحظة زمنية وبكلمات أخرى فـإن مجمـوع الطاقتين الحركية والكامنة يبقى ثابتاً في أية لحظة زمنية .عند ذلـك يمكـن أن نحسب الطاقة الكلية في أوضاع مختلفة ومن ثم نقارن النتائج التـي يجـب أن تكون متساوية :

عندما $x = \frac{A}{2}$ حيث يمكننا استخدام معطيات الطلب السابق:

$$K + U = 0.17 + 0.0565 = 0.2265 \text{ joul}$$

وعندما $x = A$ تساوي الطاقة الكلية :

$$E = U_{max} = \frac{1}{2} k x_{max}^2 = \frac{1}{2} 43.83 \times \left(\frac{10.16 \times 10^{-2}}{2}\right)^2$$

$$= 0.2265 \text{ joul}$$

وعندما $x = 0$ تساوي الطاقة الكلية :

$$E = K_{max} = K = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} 0.331 \times (1.17)^2 = 0.2265 \text{ joul}$$

وبالفعل كانت الطاقة الكلية متساوية في كل الأوضاع السابقة أي أنها محفوظة .

8- لكتابة معادلة الحركة الاهتزازية التوافقية البسيطة أي انزياح الجسم

المهتز بدلالة الزمن , نكتب المعادلة :

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

لقد وجدنا أن $A = 10.16\ cm$ و $\omega = 2\pi\nu = 11.5\,\frac{Rad}{S}$ ويجب أن نعـين الثابت ϕ_0 .لذلك تكون x بالسنتيمترات

$$x = 10.16\cos(11.5t + \phi_0)$$

في اللحظة t=0 فإن $x = 10.16\ cm$ لذلك في تلك اللحظة تصـبح المعادلـة السابقة كما يلي :

$$10.16 = 10.16\cos(\phi_0)$$

ومنه

$$\cos(\phi_0) = 1 \Rightarrow \phi_0 = 0\ \text{rad}$$

ومنه نحصل على معادلة الحركة التوافقية البسيطة للجسم المهتز في هذه المسألة

$$x = 10.16\cos(11.5\,t)$$

حيث تقدر x بالسنتيمتر والزمن بالثانية والزاوية 11.5 t بالراديان .

انتهت المحاضرة الثالثة