كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : نظرية الاعداد

المحاضرة : الرابعة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

4

المحاضرة الرابعة
(عملي)

السؤال الأول: أوجد باقي قسمة العدد

$$x = \sum_{k=1}^{49} k^5$$

على العدد 8.

الحلّ:

- إذا كان a **عدد زوجي** عندئذ $a = 2n$ بالتالي $a^5 = 2^2 \times 2^3 \times n^5$ بالتالي:
$$\boldsymbol{a^5 \equiv 0 \ (mod\ 8)}$$
- إذا كان a **عدد فردي** عندئذ
$$a^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$$
بالتالي
$$a^4 \equiv 1 \ (mod\ 8)$$
نضرب الطرفين بـ a نجد
$$\boldsymbol{a^5 \equiv a \ (mod\ 8)}$$

$$x = \sum_{k=1}^{49} k^5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 49^5$$

بالتالي

$$x \equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + 49 (mod\ 8)$$

ونعلم بأنّ

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

عندئذ

$$x \equiv 1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \times 25 - 1)(mod\ 8)$$
$$x \equiv 25^2 (mod\ 8)$$
$$x \equiv 1 (mod\ 8)$$

بالتالي باقي قسمة العدد x على العدد 8 هو العدد 1.

السؤال الثاني: أوجد باقي قسمة العدد

$$x = \left(\sum_{k=0}^{100} (k + 4)! \right)^3$$

على العدد $m = 60$.

الحلّ:

$$\sum_{k=0}^{100} (k + 4)! = 4! + 5! + \cdots + 104!$$

نلاحظ $n! \equiv 0 (mod\ 60)$ أيا كان n عدد صحيح يحقق $n \geq 5$.

بالتالي

$$\sum_{k=0}^{100}(k+4)! \equiv 4! + 5! + \cdots + 104!\,(mod\ 60)$$

$$\sum_{k=0}^{100}(k+4)! \equiv 24(mod\ 60)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{100}(k+4)!\right)^{3} \equiv (24)^{3}(mod\ 60)$$

$$x \equiv 24(mod\ 60)$$

بالتالي باقي قسمة العدد x على العدد 60 هو العدد 24.

<u>السؤال الثالث:</u> ليكن a, m, n أعداد صحيحة موجبة وليكن $d = \gcd(a^{2^n}+1, a^{2^m}+1)$ حيث $m \neq n$

والمطلوب أثبت أنّ:

$d = 1$ إذا كان a زوجي و $d = 2$ إذا كان a فردي.

الحلّ: ليكن $n > m$

$$d \mid \left(a^{2^n}+1\right) \Longrightarrow a^{2^n} \equiv -1(mod\ d)$$
$$d \mid \left(a^{2^m}+1\right) \Longrightarrow a^{2^m} \equiv -1(mod\ d)$$

$$a^{2^n} = \left(a^{2^m}\right)^{2^{n-m}} \Longrightarrow a^{2^n} \equiv (-1)^{2^{n-m}}(mod\ d)$$

بالتالي: $-1 \equiv 1(mod\ d)$

عندئذ $d \mid 2$ بالتالي $d = 1$ أو $d = 2$

- إذا كان a زوجي فإنّ $a^{2^m}+1$ و $a^{2^n}+1$ فرديان بالتالي $d = \gcd\left(a^{2^n}+1, a^{2^m}+1\right) = 1$
- إذا كان a فردي فإنّ $a^{2^m}+1$ و $a^{2^n}+1$ زوجيان بالتالي $d = \gcd\left(a^{2^n}+1, a^{2^m}+1\right) = 2$

<u>السؤال الرابع (للاطلاع)</u> أثبت أنّ $F_5 = 2^{2^5}+1$ يقبل القسمة على العدد 641

الحلّ :

$$F_5 = 2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = (2^7)^4 \times 2^4 + 1$$

لنضع $a = 2^7$ و $b = 5$

$$641 = 1 + ab = 1 + 2^7 \times 5$$
$$16 = 1 + ab - b^4$$

$$\begin{aligned} F_5 = (2^7)^4 \times 2^4 + 1 &= a^4(1+ab-b^4)+1 = a^4(1+ab) - a^4b^4 + 1 \\ &= a^4(1+ab) - (a^4b^4-1) = a^4(1+ab) - (a^2b^2-1)(a^2b^2+1) \\ &= a^4(1+ab) + (1+ab)(1-ab)(a^2b^2+1) \\ &= (1+ab)\left(a^4 + (1-ab)(a^2b^2+1)\right) = (1+ab)q \end{aligned}$$

$$;q = a^4 + (1-ab)(a^2b^2+1)$$

بالتالي: $F_5 \mid (1+ab)$ بالتالي $F_5 \mid 641$ بالتالي F_5 ليس بعدد أولي.

<u>السؤال الخامس:</u> أوجد حلّ جملة التطابقات الخطية التالية

$$x \equiv 4(mod\ 7)$$
$$4x \equiv 3(mod\ 5)$$
$$3x \equiv 2(mod\ 8)$$

الحلّ :

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 3$$

$$b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = 2$$

$$m_1 = 7, m_2 = 5, m_3 = 8$$

نلاحظ بأنّ:

$$d_i = \gcd(a_i, m_i) = 1 \ \forall \ 1 \ \leq i \leq 3$$

$$d_{ij} = \gcd(m_i, m_j) = 1 \ \forall \ 1 \ \leq i, j \leq 3 \ \& \ i \neq j$$

بالتالي يمكن تطبيق نظرية البواقي الصينية والجملة تملك حل مشترك وحيد بالنسبة للمقاس $m = m_1 m_2 m_3 = 280$

$$x^* = x_1 \acute{m}_1 N_1 + x_2 \acute{m}_2 N_2 + x_3 \acute{m}_3 N_3$$

نلاحظ بأنّ $\boldsymbol{x_3 = 6, x_2 = 2, x_1 = 4}$

$$\acute{m}_1 = m_2 m_3 = 40$$

$$\acute{m}_2 = m_1 m_3 = 56$$

$$\acute{m}_3 = m_1 m_2 = 35$$

- إيجاد N_1 المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_1 = 40$ بالنسبة للمقاس $m_1 = 7$:

المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_1 = 40$ بالنسبة للمقاس $m_1 = 7$ هو باقي قسمة العدد $(\acute{m}_1)^{\phi(m_1)-1}$ على العدد m_1.

$$(\acute{m}_1)^{\phi(m_1)-1} = 40^5 \equiv (5)^5 (mod\ 7) \equiv 3 (mod\ 7)$$

بالتالي $\boldsymbol{N_1 = 3}$

- إيجاد N_2 المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_2 = 56$ بالنسبة للمقاس $m_2 = 5$:

المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_2 = 56$ بالنسبة للمقاس $m_2 = 5$ هو باقي قسمة العدد $(\acute{m}_2)^{\phi(m_2)-1}$ على العدد m_2.

$$(\acute{m}_2)^{\phi(m_2)-1} = 56^3 \equiv (6)^3 (mod\ 5) \equiv 1 (mod\ 5)$$

بالتالي $\boldsymbol{N_2 = 1}$

- إيجاد N_3 المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_3 = 35$ بالنسبة للمقاس $m_3 = 8$:

المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_3 = 35$ بالنسبة للمقاس $m_3 = 8$ هو باقي قسمة العدد $(\acute{m}_3)^{\phi(m_3)-1}$ على العدد m_3.

$$(\acute{m}_3)^{\phi(m_3)-1} = 35^3 \equiv (3)^3 (mod\ 8) \equiv 3 (mod\ 8)$$

بالتالي $\boldsymbol{N_3 = 3}$

عندئذ

$$x^* = x_1\acute{m}_1N_1 + x_2\acute{m}_2N_2 + x_3\acute{m}_3N_3 = 1222 \equiv 102 (mod\ 280)$$

الحلّ المطلوب للجملة هو العدد 102

السؤال السادس:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب باقي قسمته على العدد 13 يساوي 5 وباقي قسمته على العدد 12 يساوي 3 وباقي قسمته على العدد 35 يساوي 2.

الحلّ : العدد المطلوب هو حلّ جملة التطابقات الخطية التالية

$$x \equiv 5 (mod\ 13)$$
$$x \equiv 3 (mod\ 12)$$
$$x \equiv 2 (mod\ 35)$$

الحلّ :

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$$

$$b_1 = 5, b_2 = 3, b_3 = 2$$

$$m_1 = 13, m_2 = 12, m_3 = 35$$

نلاحظ بأنّ:

$$d_i = \gcd(a_i, m_i) = 1\ \forall\ 1 \le i \le 3$$

$$d_{ij} = \gcd(m_i, m_j) = 1\ \forall\ 1 \le i, j \le 3\ \&\ i \ne j$$

بالتالي يمكن تطبيق نظرية البواقي الصينية والجملة تملك حل مشترك وحيد x^* بالنسبة للمقاس

$$m = m_1m_2m_3 = 5460$$

$$x^* = x_1\acute{m}_1N_1 + x_2\acute{m}_2N_2 + x_3\acute{m}_3N_3$$

نلاحظ بأنّ $x_3 = 2, x_2 = 3, x_1 = 5$

$$\acute{m}_1 = m_2m_3 = 12 \times 35$$

$$\acute{m}_2 = m_1m_3 = 13 \times 35$$

$$\acute{m}_3 = m_1m_2 = 12 \times 13$$

- إيجاد N_1 المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_1 = 12 \times 35$ بالنسبة للمقاس $m_1 = 13$:

المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_1 = 420$ بالنسبة للمقاس $m_1 = 13$ هو باقي قسمة العدد $(\acute{m}_1)^{\phi(m_1)-1}$ على العدد m_1.

$$(\acute{m}_1)^{\phi(m_1)-1} = (420)^{11} \equiv (4)^{11}(mod\ 13) \equiv 10(mod\ 13)$$

بالتالي $N_1 = 10$

- إيجاد N_2 المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_2 = 13 \times 35$ بالنسبة للمقاس $m_2 = 12$:

المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_2 = 455$ بالنسبة للمقاس $m_2 = 12$ هو باقي قسمة العدد $(\acute{m}_2)^{\phi(m_2)-1}$ على العدد m_2.

$$(\acute{m}_2)^{\phi(m_2)-1} = 455^3 \equiv (11)^3(mod\ 12) \equiv 11(mod\ 12)$$

بالتالي $N_2 = 11$

- إيجاد N_3 المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_3 = 12 \times 13$ بالنسبة للمقاس $m_3 = 35$:

المعكوس الضربي للعدد $\acute{m}_3 = 156$ بالنسبة للمقاس $m_3 = 35$ هو باقي قسمة العدد $(\acute{m}_3)^{\phi(m_3)-1}$ على العدد m_3

$$(\acute{m}_3)^{\phi(m_3)-1} = (156)^{23} \equiv (16)^{23}(mod\ 35) \equiv 11(mod\ 35)$$

بالتالي $N_3 = 11$

عندئذ

$$x^* = x_1\acute{m}_1N_1 + x_2\acute{m}_2N_2 + x_3\acute{m}_3N_3 = 39447 \equiv 1227(mod\ 5460)$$

الحلّ المطلوب للجملة هو العدد 1227

السؤال السابع(وظيفه):

1. أوجد أصغر عدد صحيح موجب باقي قسمته على العدد 2 يساوي 1 وباقي قسمته على العدد 3 يساوي 2 وباقي قسمته على العدد 5 يساوي 1.
2. أوجد حلّ جملة التطابقات الخطية التالية

$$x \equiv 2(mod\ 9)$$
$$x \equiv 7(mod\ 8)$$
$$x \equiv 7(mod\ 25)$$
