كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : الرابعة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

- شكل الكرات: الكرة المفتوحة $B(x_0,r)=\{x\in A\ ,\ d(x,x_0)<r\}$
نصف قطر الكرة r لمركز الكرة

الكرة المغلقة $\bar{B}(x_0,r)=\{x\in A\ ;\ d(x,x_0)\leq r\}$

السطح الكروي $S(x_0,r)=\{x\in A\ ;\ d(x,x_0)=r\}$

التمرين الأول: عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء العادي $(\mathbb{R},|\ |)$ حيث $d(x,y)=|x-y|$ ؟

الحل: ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ نقطة معلومة وبأخذ $r>0$ عدد حقيقي موجب

① شكل الكرة المفتوحة:

$$B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ d(x,x_0)<r\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ |x-x_0|<r\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ -r<x-x_0<r\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ x_0-r<x<x_0+r\}$$
$$\Rightarrow x\in\ ]x_0-r,x_0+r[$$

الاستنتاج: شكل الكرات المفتوحة في الفضاء $(\mathbb{R},|\ |)$ هي مجال مفتوح مركزه مركز الكرة المفتوحة ونصف قطره هو نصف قطر الكرة المفتوحة

② شكل الكرة المغلقة:

$$\bar{B}(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ d(x,x_0)\leq r\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\ ;\ |x-x_0|\leq r\}$$

$= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; -r \leq x - x_0 \leq r\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\}$

$\Rightarrow x \in [x_0 - r, \; x_0 + r]$

الاستنتاج: شكل الكرات المغلقة في الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ هي مجال مغلق مركزه مركز الكرة المغلقة ونصف قطره هو نصف قطر الكرة المغلقة

③ شكل السّطح الكروي:

$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; d(x, x_0) = r\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \; ; \; |x - x_0| = r\}$

$x - x_0 = -r$ أي $x - x_0 = r$ إما

$\boxed{x = x_0 - r}$ $\boxed{x = x_0 + r}$

$x \in \{x_0 + r, \; x_0 - r\}$

الاستنتاج: نستنتج أنّ العشرة الكروية في الفضاء المتري مؤلف من نقطتين تمثلان طرفي المجال المواقف.

التمرين الثاني: عيّن شكل الكرات في الفضاء الاقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$ حيث: $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

الحل:

لنأخذ $A(a_1, a_2)$ نقطة معلومة من $\mathbb{R}^2$ ولنأخذ $r > 0$ عدد حقيقي موجب

① شكل الكرة المفتوحة:

$B(x, r) = \{A \in \mathbb{R}^2 \; ; \; d(A, x) < r\}$

$= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r$

بالتربيع نجد أنّ: $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الاستنتاج: شكل الكرة المفتوحة في الفضاء $\mathbb{R}^2$ هي قرص دائري ماعدا المحيط

② شكل الكرة المغلقة:

$$\bar{B}(x,r) = \{A \in \mathbb{R}^2 \; ; \; d(A,x) \leq r\}$$
$$= \{A \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} \leq r\}$$
$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 \leq r^2$$

الاستنتاج: شكل الكرات المغلقة في الفضاء $(\mathbb{R}^2, d)$ هي القرص الدائري مع المحيط

③ شكل السطح الكروي:

$$S(x,r) = \{A \in \mathbb{R}^2 \; ; \; d(A,x) = r\}$$
$$\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} = r$$
$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 = r^2$$

الاستنتاج: نستنتج أن القشرة الكروية في الفضاء المتري $(\mathbb{R}^2, d)$ هي محيط الدائرة.

التمرين الثالث: عيّن شكل الكرات في الفضاء المتري المنقطع:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \; x = y \\ 1 & ; \; x \neq y \end{cases}$$

الحل: شكل الكرة المفتوحة:

• نراعي حالتين: ① $0 < r \leq 1$

$$B(x_0,r) = \{x \in X \; ; \; d(x,x_0) = 0\} = \{x_0\}$$

② $r > 1$

$$B(x_0,r) = \{x \in X \; ; \; d(x,x_0) = 0 \text{ or } d(x,x_0) = 1\} = X$$

شكل الكرة المغلقة:

• نراعي حالتين: ① $0 < r < 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X \; ; \; d(x, x_0) = 0\} = \{x_0\}$

② $r \geq 1$:

$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X \; ; \; d(x, x_0) = 0 \text{ or } d(x, x_0) = 1\} = X$

بشكل العشرة الكروية :

• نراعي حالتين ① $0 < r < 1$ أو $r \geq 1$

$S(x_0, r) = \{x \in X \; ; \; d(x, x_0) = r\} = \phi$

② $r = 1$

$S(x_0, r) = \{x \in X \; ; \; d(x, x_0) = 1\} = X \setminus \{x_0\}$

التمرين الرابع : بيّن أنّه في الفضاء المتري المنقطع إذا كان البعد بين مركزي كرتين مفتوحتين أصغر أو يساوي مجموع نصفي قطريهما فليس بالضرورة أن تكون الكرتان متقاطعتان ؟

الحل :

لنأخذ نقطتين مختلفتين ولنأخذ كرتين مفتوحتين

$B_1(x, \frac{3}{4}) \quad B_1(y, \frac{3}{4})$

$1 = d(x, y) \leq \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$B_1(x, \frac{3}{4}) = \{x\}$

$B_1(y, \frac{3}{4}) = \{y\}$

x, y نقطتين مختلفتين فالكرتين غير متقاطعتين

ملاحظات : ■ x_n متتالية متقاربة من x_0 بالتالي : $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

أو $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_0) = 0$ أو $d(x_n, x_0) < \varepsilon$

■ x_n متتالية لكوشي أي :

$\lim_{n \to \infty, m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$

■ كل متتالية متقاربة هي كوشي ، وعكسها بالحالة العامة ليست كل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متتالية لكوشي متقاربة، لكن إذا كانت كل متتالية لكوشي متقاربة

نسمي الفضاء تام

فضاء الدول $c[a,b]$ يمكن أن نعرف عليه مسافتين بالشكل:

$$\begin{cases} \bullet\ d(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)|, \\ \bullet\ \tilde{d}(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt. \end{cases}$$

التمرين الخامس:

أثبت أنّ $(c[a,b], d)$ المعرّف بالشكل: $d(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$ ليس فضاء تام؟

الحل:

لنأخذ $x_n(t)$ دالة من $c[0,1]$:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ n\left(t-\frac{1}{2}\right) & ; \quad \frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = \int_0^1 |x_n(t)-x_m(t)|\,dt =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |0-0|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left|\left(n\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right) - m\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right| dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1-1|\,dt$$

$$= 0 + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left|n\left(t-\tfrac{1}{2}\right) - m\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right| dt + 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left|n\left(t-\tfrac{1}{2}\right) - m\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right| dt = 0$$

إذاً $x_n(t)$ هي متتالية لكوشي.

لنرى فيما إذا كانت هذه المتتالية متقاربة أم لا؟

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = \lim \int_0^{\frac{1}{2}} |0-x(t)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left|n\left(t-\tfrac{1}{2}\right) - x(t)\right| dt$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1}|1-x(t)|\,dt = \lim_{0}\int_{0}^{\frac{1}{2}}x(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}|n(t-\tfrac{1}{2})-x(t)|\,dt$$

$$+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1}|1-x(t)|\,dt$$

لنفرض أنّ هذه المتتالية متقاربة إ

$$\lim d(x_n, x) = 0$$

أي أنّه كل تكامل فيه يساوي صفر

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\frac{1}{2}}|x(t)|\,dt = 0 \Rightarrow \boxed{x(t)=0}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}|n(t-\tfrac{1}{2})-x(t)|\,dt = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1}|1-x(t)|\,dt = 0 \Rightarrow 1-x(t)=0$$

$$\boxed{x(t)=1}$$

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}^{-}} x(t) = 0 \neq \lim_{t\to\frac{1}{2}^{+}} x(t) = 1$$

ليست متقاربة

أي أنّها كوشي وليست متقاربة بالتالي $[0,1]$ مع المترك المعرف عليه ليس تام.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z