كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل تابعي١

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف الفضاء الخطي وبعض المفاهيم الأساسيّة في هذا الفضاء:

تعريف الفضاء الخطي (المتجهي - الشّعاعي)

ليكن V مجموعة غير خالية و K حقل عددي تبديلي، نسمي الثلاثية $(V,+,.)$ واختصاراً V فضاءً خطياً (شعاعياً - متجهياً) فوق الحقل K حيث العملية الأولى $(+)$ داخلية وهي معرّفة على عناصر V بالشكل:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\forall x,y \in V \qquad (x,y) \xrightarrow{+} x+y = z \in V$$

والعملية الثانية $(.)$ خارجية (وهي عملية الضرب) معرّفة على V وعناصرها في الحقل K بالشكل:

$$. : K \times V \longrightarrow V$$

$$(\alpha, x) \xrightarrow{\cdot} \alpha . x \in V$$

أي: $\forall \alpha \in K \ \& \ \forall x \in V \ ; \ \alpha . x = y \in V$

إذا تحقّقت الشروط التالية:

أولاً: $(V,+)$ زمرة تبديلية أي:

أ- $(+)$ مغلقة على عناصر V أي: $\forall x,y \in V \ ; \ x+y \in V$

ب- $(+)$ تبديلية على عناصر V أي:

$$\forall x,y \in V \ ; \ x+y = y+x$$

ج- $(+)$ تجميعية على عناصر V أي:

$$\forall x,y,z \in V \ ; \ (x+y)+z = x+(y+z)$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

د- يوجد عنصر حيادي في V بالنسبة لـ (+) وهو الصفر (0)

لأنّ: $x+0=0+x=x \quad ; \quad \forall x\in V \ \& \ 0\in V$

هـ- يوجد لكل عنصر $x\in V$ نظير في V بالنسبة لـ (+) وهو $x'=(-x)$ لأنّ:

$$x'=(-x)\in V \ \& \ x+x'=x+(-x)=0$$

$$x'+x=(-x)+x=0$$

ثانياً: إنّ عملية الضرب (.) تحقّق الشروط التّالية:

1- $\forall \alpha,\beta\in k \ \& \ \forall x\in V \ ; \ (\alpha.\beta)x=\alpha(\beta x)$

2- $\forall \alpha,\beta\in k \ \& \ \forall x\in V \ ;$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha.x+\beta x$$

3- $\forall \alpha\in k \ \& \ \forall x,y\in V \ ; \ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

4- $\forall x\in V \ ; \ 1_k.x=x$

حيث 1_k هي واحدة الضرب في الحقل k بالنّسبة للعملية (.) المعرفة على k وإذا لم يوجد التباس $1.x=x \ \forall x\in V$

نسمّي الحقل k الحقل العددي أو حقل المعاملات للفضاء الخطي (المتجهي - الشعاعي) V ونرمز لعناصر الحقل العددي k بـ $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ ونسمّيها معاملات عددية (مقادير سلمية) ونسمّي عناصر الفضاء الخطي V متّجهات (أشعة) ونرمز لعناصر هذا الفضاء بأحرف لاتينية صغيرة مثل $x,y,z,\dots$

أما الفضاء الخطي فنرمز له بأحرف لاتينية كبيرة مثل $X,Y,V,\dots$

وسنصطلح على تسمية الحيادي في الحقل k بالنسبة لعملية الجمع وهو الصفر بصفر الحقل ونرمز له بالرمز 0_k.

أما الحيادي في الفضاء الخطي V بالنّسبة لعملية (+) فنسمّيه

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

صفر الفضاء الخطي ونرمز له بالرمز O_V وإذا لم يوجد أي التباس بين الصفرين نرمز لكليهما بالرمز O.

ملاحظة هامة: في الفضاء الخطي V وجدنا العلاقات التالية محققة:

1) $O_K \cdot x = O_V \quad ; \quad \forall x \in V$

2) $\alpha \cdot O_V = O_V \quad ; \quad \forall \alpha \in K$

3) $(-1) \cdot x = -x \quad ; \quad \forall x \in V \ \& \ (-1) \in K$

ملاحظة هامة أخرى:

1- عندما يكون $K = \mathbb{R}$ عندئذٍ ندعو V فضاء خطي حقيقي.

2- عندما يكون $K = \mathbb{C}$ عندئذٍ ندعو V فضاء خطي عقدي

بعض الأمثلة عن الفضاءات الخطية:

مثال (1): الفضاء الخطي الحقيقي $\mathbb{R}$: هو فضاء خطي فوق نفسه بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتان أي $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ فضاء خطي فوق الحقل K.

مثال (2): الفضاء الخطي الاقليدي الحقيقي $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \ ; \ x_i \in \mathbb{R} \ ; \ i = 1, 2, \dots, n \}$$

$$+ : \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ ; \ x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)$$

$$= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\cdot : \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \& \ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

مثال (3): الفضاء $c[a,b]$ هو فضاء خطي حقيقي بالنسبة للعمليتان

$$(+) : \forall x = x(t) \ \wedge \ y = y(t) \in c[a,b]$$

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\cdot) : \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \& \ \forall x = x(t) \in c[a,b]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$

مثال (4): الفضاء ℓ^∞ هو فضاء خطي عقدي بالنسبة للعمليتان

الأولى (+): $\forall x=(\xi_i)_{i=1}^{\infty} \;\&\; y=(\eta_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^\infty$

$x+y=(\xi_i+\eta_i)_{i=1}^{\infty} = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \dots\dots)$ ؛

الثانية (.): $\forall \alpha \in \mathbb{C} \;\&\; \forall x=(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$

$\alpha x = \alpha(\xi_i)_{i=1}^{\infty} = (\alpha\xi_i)_{i=1}^{\infty}$

مثال (5): الفضاء ℓ^p هو فضاء عقدي أو حقيقي بالنسبة للعمليتان

الأولى (+): $\forall x=(\xi_i)_{i=1}^{\infty} \;\wedge\; y=(\eta_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$

$x+y=(\xi_i)_{i=1}^{\infty}+(\eta_i)_{i=1}^{\infty}=(\xi_i+\eta_i)_{i=1}^{\infty}=$

$(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \dots\dots)$

الثانية (.):

$\forall \alpha \in K \;\&\; \forall x=(\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$ ؛ $\alpha x=\alpha(\xi_i)_{i=1}^{\infty}=(\alpha\xi_i)_{i=1}^{\infty}$

حيث K يمكن أن يكون $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$.

* الفضاء الجزئي الخطي:

ليكن V فضاء خطي فوق الحقل K ندعو المجموعة الجزئية غير الخالية Y من V أي: $Y \subseteq V$ ؛ $Y \neq \phi$

فضاءً جزئياً إذا تحقق:

$\forall \alpha,\beta \in K \;\&\; \forall x,y \in Y$ ؛ $\alpha x+\beta y \in Y$

ملاحظة: عندما $Y=V$ أو $Y=\{0\}$ عندئذٍ ندعو Y فضاء خطي جزئي فعلي من V وهو فضاء خطي جزئي غير فعلي

وكل فضاء خطي جزئي Y حيث $Y \neq \phi$ من فضاء خطي V ندعوه فضاء خطي جزئي فعلي إذا كان $Y \neq V$ و $Y=\{0\}$.

مثال: ليكن $V=\mathbb{R}^3$ الفضاء الخطي الحقيقي وليكن:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$Y_1 = \{(a,b,o) \; ; \; a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$Y_2 = \{(a+b, a, b) \; ; \; a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

والمطلوب: تحقق فيما إذا كان كل من Y_1 و Y_2 فضاءات خطية جزئية من $\mathbb{R}^3$

الحل:

$O_{\mathbb{R}^3} = (o,o,o) \in Y_1 \; ; \; o \in \mathbb{R}$ إذ أن $Y_1 \neq \phi$ لأنه

$\forall y = (a,b,o) \in Y_1$ كذلك فإنه

$y_1' = (a',b',o) \in Y_1 \; ; \; a,b,a',b' \in \mathbb{R}$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad \alpha y_1 + \beta y_1' = \alpha(a,b,o) + \beta(a',b',o)$ لدينا

$= (\alpha a, \alpha b, o) + (\beta a', \beta b', o)$

$= (\underbrace{\alpha a + \beta a'}_{\mathbb{R}\to}, \underbrace{\alpha b + \beta b'}_{\mathbb{R}\to}, o) \in Y_1$

$\Leftarrow Y_1$ فضاء خطي جزئي في $V = \mathbb{R}^3$

• تعريف التركيب الخطي:

إذا كان V فضاءً خطياً و $V, V_1, V_2, \ldots, V_n$ مجموعة من الأشعة من الفضاء الخطي V، نقول عن الشعاع V أنه تركيب خطي للأشعة $V_1, V_2, \ldots, V_n$ إذا وجدت المقادير السلمية $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ من الحقل K بحيث يكون:

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$$

أما إذا كانت $V_1, V_2, \ldots$ من V فنقول إن الشعاع V تركيب خطي للأشعة $V_1, V_2, \ldots$ إذا تحقق:

$\exists \alpha_i \in K$ و $i = 1, 2, \ldots$ &

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i V_i = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots$$

• الاستقلال والارتباط الخطي في الفضاءات الخطية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا كان V فضاءً خطياً و كانت $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة من الأشعة من الفضاء الخطي V نقول عن مجموعة الأشعة هذه أنّها مستقلة خطياً إذا كان :

$$\sum \alpha_i v_i = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n$ و $\alpha_i \in K$

وإلّا تكون مرتبطة خطياً أي إذا كان لدينا $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ فليست جميع المقادير السلمية $\alpha_n, \dots, \alpha_2, \alpha_1$ معدومة

قاعدة فضاء خطي :

نسمي المجموعة Y من V أي $Y \subseteq V$ قاعدة للفضاء الخطي V إذا تحقّق الشرطان التاليان :

1. المجموعة Y مستقلة خطياً
2. أي شعاع (متجه) من الفضاء الخطي V يُكتب على شكل تركيب خطي وحيد لعناصر المجموعة Y.

فإذا كانت Y مجموعة منتهية من الأشعة وعدد عناصرها n عندئذٍ نقول إنّ الفضاء الخطي بعده منتهٍ ويساوي إلى n ونكتب $\dim V = n < \infty$ وبخلاف ذلك أي إذا كانت Y مجموعة غير منتهية و Y قاعدة لـ V (لا نتبسط ذلك) فإنّنا نقول إنّ الفضاء الخطي V ذو بعد غير منتهٍ

مثال : إنّ المجموعة $Y = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$ حيث $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ هي قاعدة للفضاء الخطي $\mathbb{R}^3$ حيث : $|Y| = 3$

وبالتالي $\dim \mathbb{R}^3 = 3 < \infty$ كذلك فإنّ المجموعة Y مجموعة مستقلة خطياً وكذلك فإنّ

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$

مثلاً: $(5,4,6) = \overset{\alpha_1}{5}(1,0,0) + \overset{\alpha_2}{4}(0,1,0) + \overset{\alpha_3}{6}(0,0,1)$

نظرية ملاحظة هامة جداً:

إذا كان V فضاء خطي منتهي البعد، حيث $\dim V = n < \infty$

فإنّ أي مجموعة من الأشعة عن الفضاء الخطي V تحوي $(n+1)$ أو أكثر من الأشعة تكون مرتبطة خطياً.

ملاحظة هامة: نقول عن الفضائين الخطيين أنّهما ايزومورفيان فيما بينهما وليكن هذان الفضاءان هما V و V' إذا كان بالإمكان إيجاد ايزومورفيزم من V إلى V' بالشكل:

$$\varphi : V \longrightarrow V'$$

$$\varphi(V) = V'$$ يحقّق:

1. $\varphi(V_1 + V_2) = \varphi(V_1) + \varphi(V_2)$
2. $\varphi(\alpha V_1) = \alpha\,\varphi(V_1)$; $\forall \alpha \in K$ & $\forall V_1, V_2 \in V$

حيث V و V' فضاءان خطيان معرّفان فوق نفس الحقل.

وفي حال تحقّق ذلك نكتب $V \cong V'$

■ الفضاءات المنظمة:

تعريف الفضاء المنظم: ليكن X فضاء خطي حقيقي أو عقدي نسمي كل تطبيق $\|\ \|$ معرّف بالشكل:

$$\|\ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

ويحقّق الشروط التالية:

1. $\|x\| \geq 0$; $\forall x \in X$ & $\|x\| = 0 \iff x = 0$; $x \in X$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; $\forall \lambda \in K$ & $x \in X$
3. $\forall x, y \in X$; $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظيماً على الفضاء X ، وندعو الثنائية $(X, \|\cdot\|)$ واختصاراً X فضاءً منظماً وندعو $\|x\|$ نظيم العنصر x حيث $x \in X$

• بعض الأمثلة عن الفضاءات المنظمة:

1) الفضاء $\mathbb{R}$ فضاء منظم حقيقي نظيمه هو:

$$\|x\| = |x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) الفضاء الاقليدي الحقيقي $\mathbb{R}^n$ وهو فضاء منظم ونظيمه هو:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad ; \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

3) الفضاء $c[a,b]$ فضاء منظم ونظيمه هو:

$$\|x\| = \max |x(t)| \quad ; \quad \forall x = x(t) \in c[a,b]$$

4) الفضاء ℓ^p هو فضاء منظم عقدي أو حقيقي $a \le t \le b$ ونظيمه يُعطى بالشكل:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad \forall x = (\xi_i)_{i \ge 1} \in \ell^p$$

أيضاً الفضاء ℓ^∞ هو فضاء منظم عقدي ونظيمه يُعطى بالشكل:

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i| \quad ; \quad \forall x = (\xi_i)_{i \ge 1} \in \ell^\infty$$

5) الفضاء $B(A)$ فضاء منظم ونظيمه هو:

$$\|x\| = \sup_{t \in A} |x(t)| \quad ; \quad \forall x = x(t) \in B(A)$$

• العلاقة بين الفضاء المنظم والفضاء المتري:

نظرية هامة كل فضاء منظم X هو فضاء متري مسافته تُعطى وفق العلاقة $d(x,y) = \|x-y\| \quad ; \quad \forall x, y \in X$

البرهان:

نتحقق أنّ d مسافة على X أي أنّ X فضاء متري:

1) نلاحظ أنّ $d(x,y) = \|x-y\| \ge 0$

وذلك $\forall x, y \in X$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(1) $d(x,y)=0 \iff \|x-y\|=0 \iff x-y=0 \iff x=y$

حسب تعريف d ، حسب تعريف النّظيم

(3) $d(x,y)=\|x-y\|=\|-(y-x)\|=\|-1\|\cdot\|y-x\|$

$=\|y-x\|=d(y,x)$; $\forall x,y \in X$

(4) $d(x,z)=\|x-z\|=\|x-y+y-z\| \leq$

$\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z)$

; $\forall x,y,z \in X$

من الشروط السابقة نجد أنّ d مسافة مترية و X فضاء متري.

ملاحظة هامة: إنّ عكس النظرية السابقة غير صحيح في الحالة العامة أي ليس كل فضاء متري هو فضاء منظم في الحالة العامة

ملاحظة: (تذكرة هامة):

تعريف: لتكن M مجموعة ما من الفضاء الخطي X أي $M \subseteq X$ نرمز للمجموعة $M+a$ حيث a عنصر مثبت من X وهي انسحاب للمجموعة M في X ونعرّفها بالشكل:

$M+a=\{x+a \; ; \; x \in M \;\&\; a$ عنصر مثبت من $X\}$

هي عبارة عن انسحاب للمجموعة M في X

ملاحظة هامة جداً: كل فضاء منظم هو فضاء خطي وبالتالي جميع المفاهيم التي تكون صحيحة من أجل الفضاءات الخطية تكون صحيحة من أجل الفضاءات المنظمة على سبيل المثال:

الاستقلال والارتباط الخطي - الفضاءات الخطية منتهية البعد - قاعدة فضاء خطي - الفضاءات الخطية الجزئية ---

ملاحظة (2): وفقاً للنظرية السابقة فإنّ كل فضاء منظم هو فضاء

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متري وبالتالي جميع المفاهيم التي تكون صحيحة من أجل الفضاءات المترية تكون صحيحة من أجل الفضاءات المنظمة.

مثال: التقارب والتباعد لمتتالية في فضاء متري.

ملاحظة أخيرة: ندعو المسافة المعرّفة في نص البرهنة السّابقة بالمسافة المولدة عن نظيم.

وظيفة: استنتج نظيم كل من الفضاءات المترية:

$B(A)$, $c[a,b]$, ℓ^∞ , ℓ^p , $\mathbb{R}^n$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z