كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : تحليل عددي٢

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات — الدكتور: لمى رزوق

السنة: الرابعة

المادة: تحليل عددي (2) — المحاضرة: الخامسة نظري

ثانياً: طريقة النقطة الثابتة (التكرارات المتتالية)

لإيجاد حذور جملة المعادلات غير الخطية

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

تعريف تكرارات النقطة الثابتة لجملة المعادلات (3) هي المعادلات التكرارية الآتية:

$$(6)\quad \begin{cases} p_1^{k+1} = f_1(p_1^k, p_2^k, \dots, p_n^k) \\ p_2^{k+1} = f_2(p_1^k, p_2^k, \dots, p_n^k) \\ \vdots \\ p_n^{k+1} = f_n(p_1^k, p_2^k, \dots, p_n^k) \end{cases}$$

حيث $k = 0, \dots, m$

و p^0 نقطة كيفية قريبة من النقطة الثابتة بقدر كاف.

$$p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)^T$$

برهنة تقارب تكرارات النقطة الثابتة

بفرض أن الدوال $f_i(X)$ بحيث $i = 1, \dots, n$ مستمرة في المنطقة المجاورة للنقطة الثابتة $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$، وبفرض أنه تم اختيار نقطة ابتدائية $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0)^T$ قريبة من النقطة الثابتة بقدر كاف، و تحققت المتراجحات التالية:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left|\frac{\partial l_1}{\partial x_1}\right|_{P^0} + \left|\frac{\partial l_1}{\partial x_2}\right|_{P^0} + \cdots + \left|\frac{\partial l_1}{\partial x_n}\right|_{P^0} < 1$$

$$\left|\frac{\partial l_2}{\partial x_1}\right|_{P^0} + \left|\frac{\partial l_2}{\partial x_2}\right|_{P^0} + \cdots + \left|\frac{\partial l_2}{\partial x_n}\right|_{P^0} < 1$$

$$\vdots$$

$$\left|\frac{\partial l_n}{\partial x_1}\right|_{P^0} + \left|\frac{\partial l_n}{\partial x_2}\right|_{P^0} + \cdots + \left|\frac{\partial l_n}{\partial x_n}\right|_{P^0} < 1$$

عندها تتقارب تكرارات النقطة الثابتة المذكورة في العلاقات (6) إلى النقطة الثابتة أي أن:

$$\lim_{k\to\infty} p_1^{k+1} = \lim_{k\to\infty} l_1(p_1^k, \ldots, p_n^k) = p_1$$

$$\vdots$$

$$\lim_{k\to\infty} p_n^{k+1} = \lim_{k\to\infty} l_n(p_1^k, \ldots, p_n^k) = p_n$$

إن تحقق هذه النهايات لتكرار النقطة الثابتة غير ممكنة عملياً لأن ∞ غير معروفة ولكننا سنكتفي بالتكرار:

$P^m = (p_1^m, p_2^m, \ldots, p_n^m)^T$

الذي يحقق المعيار التالي:

شرط توقف الخوارزمية $\|P^m - P^{m-1}\| < \varepsilon$

مثال: استخدم طريقة النقطة الثابتة (التكرارات المتتالية) لإيجاد حل تقريبي لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x - \sin(x+y) = 0 \\ y - \cos(x-y) = 0 \end{cases} \qquad P^0 = (1,1)^T$$

علماً بأن: $\varepsilon = 3E-3$

وأن k ستتوقف عن التكرار عند تحقق:

$$\|P^n - P^{n-1}\| < 3E-3$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل

$$l_1(x,y) = x = \sin(x+y)$$
$$l_2(x,y) = y = \cos(x-y)$$

نختبر برهنة التقارب لإثبات تقارب تكرارات النقطة الثابتة

وفق هذا الاختبار: $\frac{\partial l_1}{\partial x} = \cos(x+y)$, $\frac{\partial l_1}{\partial y} = \cos(x+y)$

$$\frac{\partial l_2}{\partial x} = -\sin(x-y) \qquad \frac{\partial l_2}{\partial y} = \sin(x-y)$$

$$\left|\frac{\partial l_1}{\partial x}\right|_{p^\circ} + \left|\frac{\partial l_1}{\partial y}\right|_{p^\circ} \overset{?}{<} 1 \Longrightarrow |\cos(1+1)| + |\cos(1+1)| < 1$$

$$\left|\frac{\partial l_2}{\partial x}\right|_{p^\circ} + \left|\frac{\partial l_2}{\partial y}\right|_{p^\circ} \overset{?}{<} 1 \Longrightarrow |-\sin(1-1)| + |\sin(1-1)| < 1$$

بما أن الشروط محققة فالاختبار متقارب.

تكرارية النقطة الثابتة:

$$p_1^{k+1} = l_1(p_1^k, p_2^k) = \sin(p_1^k + p_2^k)$$
$$p_2^{k+1} = l_2(p_1^k, p_2^k) = \cos(p_1^k - p_2^k)$$

التكرار الأول:

$$p_1' = l_1(p_1^\circ, p_2^\circ) = \sin(p_1^\circ + p_2^\circ) = \sin(2) \simeq 0.909297$$
$$p_2' = l_2(p_1^\circ, p_2^\circ) = \cos(p_1^\circ - p_2^\circ) = \cos(0) = 1$$
$$p' = (p_1', p_2') = (0.909297, 1)$$

نختبر معيار التوقف:

$$\|p' - p^\circ\| = \sqrt{(0.909297-1)^2 + (1-1)^2} \simeq 0.090703 > 3\cdot10^{-3}$$

شرط التوقف لم تحقق

التكرار الثاني:

$$p_1^2 = l_1(p_1', p_2') \simeq 0.94325$$
$$p_2^2 = l_2(p_1', p_2') \simeq 0.99589$$
$$\|p^2 - p'\| \simeq 0.0342 > 3\cdot10^{-3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التكرار الثالث :

$\rho_1^3 = \sin(\rho_1^2, \rho_2^2) \simeq 0.93292$

$\rho_2^3 = \cos(\rho_1^2, \rho_2^2) \simeq 0.99861$

$\|\rho^3 - \rho^2\| \simeq 0.01068 > 3\bar{10}^3$

التكرار الرابع :

$\rho_1^4 = \sin(\rho_1^3, \rho_2^3) \simeq 0.93564$

$\rho_2^4 = \cos(\rho_1^3, \rho_2^3) \simeq 0.99784$

$\|\rho^4 - \rho^3\| \simeq 0.002827 < 3\bar{10}^3$

شرط التوقف محقق

بالتالي الحل التقريبي لجملة المعادلتين : $\rho^4 = (0.93564, 0.99784)^T$

المشتقات التقريبية

① صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لإيجاد قيمة المشتق الثاني :

نفرض أن $f(x) \in C^4[x-h, x+h]$

حيث h هي خطوة وهي مقدار موجب صغير ، نشر $f(x+h)$ و $f(x-h)$ حول x ونكتفي بالحدود حتى المشتق الرابع

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(c)$$

; $c \in [x-h, x+h]$

نجمع : $f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(c)$

نحلها بالنسبة لـ $f''(x)$

$$(1) \quad f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$$

من الواضح أنه عندما $h \to 0$ يصبح الخطأ المقطع :

$$O(h^2) = \frac{h^2}{12}f^{(4)}(c) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي أن المشتق الثاني في العلاقة (1) سيعطي قيمة دقيقة ولكن ذلك مستحيل حاسوبياً لهذا سنكتفي بـ h صغيرة بقدر كاف (أصغر تماماً من 1) ونحصل على صيغة تقريبية من المرتبة الثانية:

لإيجاد المشتق الثاني تكون من الصيغة:

$$d_2(x,h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

و الخطأ المقطع:

وهو الخطأ المقطع الأعظمي $E_{trun}(x,h) = \left| \frac{-h^2}{12} f^{(4)}(c) \right|$

مثال: استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب قيمة تقريبية للمشتق الثاني للدالة $f(x) = x^2 - e^{x-1}$ عند $x_0 = 1$ و احسب الخطأ الحقيقي و المقطع مستخدماً الخطوات: $h_k = (0.1)^k$ ؛ $k = 1, 2, 3, 4$

الحل:

$$d_2(x,h) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

$$k=1 \Rightarrow h_1 = (0.1) \Rightarrow d_2(x, 0.1) = \frac{f(x+0.1) + f(x-0.1) - 2f(x)}{(0.1)^2}$$

$$d_2(x_0, 0.1) = \frac{f(1.1) + f(0.9) - 2f(1)}{0.01} \simeq 0.9991664$$

الخطأ الحقيقي: $\delta_{h_1} = |f''(x_0) - d_2(x_0, h_1)|$

$$\delta_{h_1} = |f''(1) - d_2(1, 0.1)| \simeq 8.336 E-4$$

الخطأ المقطع: $E(x_0, h_1) = E(1, 0.1) = \left| \frac{-h^2}{12} f^{(4)}(c) \right|$

؛ $c \in [1-0.1, 1+0.1] \Rightarrow c \in [0.9, 1.1]$

$f'(x) = 2x - e^{x-1}$ ، $f''(x) = 2 - e^{x-1}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f'''(x) = -e^{x-1}$ ، $f^{(4)}(x) = -e^{x-1}$

$\max_{x\in[0.9,1.1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[0.9,1.1]} |-e^{x-1}| \leq e^{1.1-1} = e^{0.1} \simeq 1.10517$

$E(1,0.1) \leq \left| \frac{-(0.1)^2}{12} e^{0.1} \right| \simeq 9.209E-4$

تنظم النتائج بحسب الجدول التالي:

حيث نجد بالمتابعة بتصغير الخطوة سنحصل على قيم غير متقاربة وقد تكون سيئة بسبب عدم الاستقرار الحسابي (القسم على مقادير قريبة من الصفر)

$h_k = (0.1)^k$	$d_2(x_0, h_k)$	δ_{h_k}	E_{h_k}
$h_1 = 0.1$	0.9991664	8.336E-4	9.209E-4
$h_2 = (0.1)^2$	0.99999991666	8.333E-6	8.417E-6
$h_3 = (0.1)^3$	0.999999917	8.3E-8	8.3417E-8
$h_4 = (0.1)^4$	$\simeq 1$	$\simeq 0$	8.33417E-10

② صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لإيجاد قيمة المشتق الثالث:

$$d_3(x,h) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$$

الخطأ المقطع: $E(x,h) = \frac{1}{2} h^2 f^{(5)}(c)$

؛ $c \in [x-2h, x+2h]$

مثال: استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية لحساب قيمة تقريبية لـ $f'''(1)$ حيث $f(x) = \sin(x-1) + x^3$

لحساب الأخطاء المطلقة والمقطعة من أجل الخطوات:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$h_k = (0.1)^k$; $k = 1, 2, 3, 4, 5$

الحل

$k=1 \Rightarrow h_1 = 0.1 \Rightarrow d_3(1, h_1) = d_3(1, 0.1)$

$$= \frac{f(1+0.2) - 2f(1.1) + 2f(0.9) - f(1-0.2)}{2(0.1)^3} \simeq 5.00249$$

$$E(1, 0.1) = \left| \frac{h_1^2}{2} f^{(5)}(c) \right| \quad ; \quad c \in [0.8, 1.2]$$

$$f^{(5)}(x) = \cos(x-1)$$

$$\max_{x \in [0.8, 1.2]} |f^{(5)}(x)| < 1 \Rightarrow E(1, 0.1) = \frac{1}{2} h_1^2 \simeq 0.005$$

$$\delta_{h_1} = |f'''(1) - d_3(1, 0.1)| = |15 - 5.00249|$$

$$\delta_{h_1} \simeq 2.49E-3$$

وظيفة: تنظم نتائج جميع الخطوات في جدول.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة