كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : الثانية /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1 ليكن $\mathbb{C}[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق مجموعة الأعداد العقدية، والمطلوب:

① هل $f(x)=5i$ كثيرة حدود مختزلة أم لا في $\mathbb{C}[x]$.

② هل $g(x)=x-i$ كثيرة حدود مختزلة أم لا في $\mathbb{C}[x]$.

③ هل $h(x)=x^2+1$ كثيرة حدود مختزلة أم لا في $\mathbb{C}[x]$.

الحل ① $f(x)=5i$ كثيرة حدود ثابتة، $\deg f(x)=0$

ونعلم بأن أي كثيرة حدود من $F[x]$ حيث F حقل درجتها تساوي صفر هي كثيرة حدود مختزلة بالتالي $f(x)$ مختزلة في $\mathbb{C}[x]$.

② أي كثيرة حدود من $F[x]$ حيث F حقل درجتها تساوي 1 هي كثيرة حدود لا مختزلة في $F[x]$ بالتالي $g(x)$ لا مختزلة في $\mathbb{C}[x]$.

③ $h(x)=x^2+1$ ، $\deg h(x)=2$ وأصفار $h(x)$ هي $+i$ ، $-i$

بما أن $h(x)$ تملك جذور في $\mathbb{C}[x]$ فإن $h(x)$ مختزلة في $\mathbb{C}[x]$.

2 أثبت أن $f(x)=x^2+1$ كثيرة حدود لا مختزلة في $\mathbb{R}[x]$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل نفرض جدلاً أن $f(x)$ مختزلة في $\mathbb{R}[x]$

عندئذ: $f(x)=(ax+b)(cx+d)$ ؛ $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$x^2+1=acx^2+(ad+bc)x+bd$

بالمطابقة: $ac=1$ ، $ad+bc=0$ ، $bd=1$

$a^2d + bac = 0 \Rightarrow a^2d + b = 0 \Rightarrow a^2d^2 + bd = 0$

$a^2d^2 = -1$ وهذا مستحيل في $\mathbb{R}$، بالتالي الفرض الجدلي خاطئ و $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{R}[x]$.

2b: $f(x) = x^2 + 1$ ، $\deg f(x) = 2$

أصفار $f(x)$ هي $+i$ و $-i$ وبما أن $f(x)$ لا تملك جذور في $\mathbb{R}$ فإن $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{R}[x]$.

3 أثبت أن $f(x) = -x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ لا تحللة فوق $\mathbb{Q}[x]$.

الحل: إن $\deg f(x) = 2$ ، $\mathbb{Q}$ حقل

أصفار $f(x)$ هي: $a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin \mathbb{Q}$ ، $a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \notin \mathbb{Q}$

نلاحظ أن $f(x)$ لا تملك جذور من $\mathbb{Q}$ بالتالي $f(x)$ لا تحللة فوق $\mathbb{Q}[x]$.

4. $\deg f(x) = n > 0$; $a_0 \neq 0$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

عندئذ إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \frac{a}{b}$ ، $\gcd(a,b) = 1$

أثبت إذا كان α جذر لـ $f(x)$ في $\mathbb{Q}$ فإن:

$a \mid a_0$ ، $b \mid a_n$

الحل: $\alpha = \frac{a}{b}$ جذر لـ $f(x)$ عندئذ:

$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$

$a_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{a}{b}\right) + a_0 = 0$

نضرب بـ b^n:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$a_n a^n + a_{n-1} b a^{n-1} + \dots + a_1 b^{n-1} a = -a_0 b^n$ ---(1)

$a(a_n a^{n-1} + a_{n-1} b a^{n-2} + \dots + a_1 b^{n-1}) = -a_0 b^n$

$\Rightarrow a / -a_0 b^n$

وبما أن $gcd(a,b)=1$ فإن a / a_0

ن (1) $a_n a^n = (-a_{n-1} a^{n-1} - \dots - a_1 b^{n-2} a - a_0 b^{n-1}) \times b$

$\Rightarrow b / a_n a^n$

وبما أن $gcd(a,b)=1$ فإن b / a_n

5 ليكن $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

و $a_0 \neq 0$ عندئذ: إذا كانت $f(x)$ تملك جذر في $\mathbb{Q}$

أثبت أن $f(x)$ عندئذ تملك جذر في $\mathbb{Z}$ وهذا الجذر

يقسم الحد الثابت a_0.

الحل ليكن $\alpha = \frac{a}{b}$ جذر لـ $f(x)$ في $\mathbb{Q}$ حيث $gcd(a,b)=1$

عندئذ حسب التعريف السابق:

a / a_0 و $b / a_n \Rightarrow a / a_0$ و $b / 1 \Rightarrow b \in \{-1, 1\}$

بالتالي $\alpha = a \in \mathbb{Z}$ أو $\alpha = -a \in \mathbb{Z}$

بالإضافة إلى ذلك a / a_0 بالتالي $f(x)$ تملك جذر

في $\mathbb{Z}$ وهذا الجذر يقسم الحد الثابت a_0

6 ليكن $f(x) = x^3 + 19x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ أثبت أن $f(x)$

مختزلة فوق $\mathbb{Q}[x]$.

الحل إذا أثبتنا أن الأعداد الصحيحة: $\{-1, 1, -3, 3\}$

والتي هي قواسم الحد الثابت 3، ليست جذور لـ $f(x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تكون $f(x)$ لا تملك جذور من $\mathbb{Q}$

$f(-1) \neq 0$ ، $f(1) \neq 0$ ، $f(-3) \neq 0$ ، $f(3) \neq 0$

نلاحظ بأن أي قاسم للحد الثابت ليس جذر لـ $f(x)$

بالتالي $f(x)$ لا تملك جذر من $\mathbb{Q}$ ، وبما أن $\deg f(x) = 3$

و $\mathbb{Q}$ حقل فإن $f(x)$ لا تحللة فوق $\mathbb{Q}[x]$.

وظيفة: أثبت أن $f(x) = x^3 - 4x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ كثيرة حدود لا تحللة فوق $\mathbb{Q}[x]$.

وظيفة: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

هل هي تحللة فوق $\mathbb{Q}[x]$ أم لا؟

7 ليكن $F_n = 2^{2^n} + 1$ حيث $n \geq 0$ (عدد صحيح)

هل $f(x) = x^3 + F_n x + 2$ تحللة أم لا في $Z_3[x]$.

الحل $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ ، $\deg f(x) = 3$

$F_n = 2^{2^n} + 1 = 2 \pmod 3$

$f(0) = 2 \neq 0$ ، $f(1) = 2 \neq 0$ ، $f(2) = 2 \neq 0$

نلاحظ أن $f(x)$ لا تملك جذر في Z_3 و

$\deg f(x) = 3$

فإن $f(x)$ لا تحللة في $Z_3[x]$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

8 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \in Z_5[x]$

حيث $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ، أثبت أن $f(x)$ لا تحللة فوق $Z_5[x]$. ثم أثبت أن:

$Z_5[x]/\langle f(x)\rangle$ حقل وما عدد عناصره ؟!

الحل

Z_5 حقل ، $\deg f(x) = 3$ ،

$f(0) = 3 \neq 0$ ، $f(1) = 3 \neq 0$ ، $f(2) = 3 \neq 0$ ، $f(3) = 4 \neq 0$

$f(4) = 4 \neq 0$

بالتالي $f(x)$ لا تملك جذور من Z_5

$\Leftarrow$ $f(x)$ لا تحللة فوق Z_5

$\Leftarrow$ $I = \langle f(x)\rangle$ إيديال أعظمي في $Z_5[x]$

$\Leftarrow$ بالتالي $Z_5[x]/I$ حقل.

$Z_5[x]/I = \{ax^2 + bx + c + I \; ; \; a, b, c \in Z_5\}$

عدد عناصر هذا الحقل $5^3 = 125$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة