كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

المادة : مواضيع مختارة

المحاضرة : التاسعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات — الدكتور: أحمد عيسى

السنة: الرابعة

المادة: مواضيع مختارة — المحاضرة: التاسعة نظري

برهنة ليكن F حقلاً و $F[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل F، $f(x) \in F[x]$ عندئذ:

$f(x)$ لامختزلة فوق $F[x]$ $\Leftrightarrow$ $I = \langle f(x) \rangle$ إيديال أعظمي في $F[x]$

$\Leftrightarrow$ $F[x]/I = \langle f(x) \rangle$ حقل

مثال أثبت أن $Q[x]/\langle x^2+1 \rangle$ حقل.

الحل يجب أن نثبت أن $I = \langle x^2+1 \rangle$ إيديال أعظمي في $Q[x]$ وحتى نثبت أن I إيديال أعظمي في $Q[x]$ يجب أن نثبت أنّ $f(x) = x^2+1$ لامختزلة فوق $Q[x]$

Q حقل و $\deg f(x) = 2$

أصفار $f(x) = x^2+1$ هي $\{-i, +i\}$

$f(x)$ لاتملك جذر في Q بالتالي $f(x)$ لامختزلة فوق $Q[x]$، بالتالي I إيديال أعظمي في $Q[x]$ و $Q[x]/I$ حقل.

برهنة ليكن F حقلاً و $p(x), g(x), f(x) \in F[x]$ ولتكن $f(x)$ لامختزلة فوق $F[x]$ و

$$f(x) \mid g(x)p(x)$$

عندئذ $f(x) \mid g(x)$ أو $f(x) \mid p(x)$

البرهان $f(x)$ لامختزلة فوق $F[x]$

$I = \langle f(x) \rangle$ إيديال أعظمي في $F[x]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ولدينا $f(x) \mid g(x)p(x)$ عندئذ:

$\exists\ \varphi(x) \in F[x]$; $g(x)p(x) = f(x)\varphi(x) \in I = \langle f(x) \rangle$

$I \ni F[x]$

بما أن I إيديال أعظمي في $F[x]$ بالتالي: I إيديال أولي في $F[x]$ وبما أن $g(x)p(x) \in I$

عندئذ إما $g(x) \in I = \langle f(x) \rangle \Leftarrow g(x) = g_1(x) f(x)$

; $g_1(x) \in F[x] \Rightarrow f(x) \mid g(x)$

أو $p(x) \in I = \langle f(x) \rangle \Leftarrow p(x) = g_2(x) f(x)$

و $g_2(x) \in F[x] \Rightarrow f(x) \mid p(x)$

* ندرس في البرهنة التالية الحقل: $Z_p[x] / I = \langle f(x) \rangle$

(حيث p عدد أولي) من حيث شكل العناصر وعددها:

برهنة p عدد أولي و $Z_p[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل Z_p ولتكن $f(x) \in Z_p[x]$, $I = \langle f(x) \rangle$

و $\deg f(x) = n$

عندئذ إذا كانت $f(x)$ لا مختزلة فوق $Z_p[x]$ بالتالي:

$$Z_p[x]/I = \langle f(x) \rangle = \{a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 + I\}$$

حقل مؤلف من p^n عنصر حيث $a_i \in Z_p$, $\forall\ 0 \le i \le n-1$

مثال لتكن $Z_2[x]$ حلقة كثيرات الحدود فوق الحقل Z_2

ولتكن: $f(x) = x^3 + x + 1 \in Z_2[x]$

① أثبت أن $f(x)$ لا مختزلة فوق $Z_2[x]$.

② أثبت أن الحلقة $Z_2[x]/I$ حقلاً حيث $I = \langle f(x) \rangle$

ثم عين هذا الحقل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل ① $Z_2 = \{0, 1\}$ حقل و $\deg f(x) = 3$

$f(0) = 1 \neq 0 \quad , \quad f(1) = 1 \neq 0$

$f(x)$ لا تملك جذور في Z_2 بالتالي $f(x)$ لا تحللة في $Z_2[x]$

② نلاحظ بأن $I = \langle f(x) \rangle$ إيديال أعظمي في $Z_2[x]$ ، لأن $f(x)$ لا تحللة في $Z_2[x]$

عندئذ $Z_2[x]/I = \{ ax^2 + bx + c + I \; ; \; a, b, c \in Z_2 \}$ حقل

وهذا الحقل مؤلف من $2^3 = 8$ من العناصر.

ندرس الآن بعض البرهانات والمعايير التي تخص كثيرات الحدود فيما إذا كانت تحللة أم لا في $R[x]$ حيث $R = Z$ أو $R = Q$

تعريف: ليكن $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in Z[x]$

نسمي القاسم المشترك الأعظم للعناصر $a_0, a_1, \ldots, a_n \in Z$

بـ رئيس كثيرة الحدود $f(x)$ ، أي أن رئيس كثيرة الحدود $f(x)$ ،

هو $\gcd(a_0, a_1, \ldots, a_n)$

إذا كان $\gcd(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$

عندئذ نقول إن $f(x)$ كثيرة حدود رئيسية

برهنة غاوس (دون برهان)

لتكن $f(x) \in Z[x]$ كثيرة حدود رئيسية درجتها أكبر من الصفر

عندئذ $f(x)$ لا تحللة في $Q[x] \iff f(x)$ لا تحللة في $Z[x]$

مثال: لتكن $f(x) = x^2 - 2x + 3 \in Z[x]$

① هل $f(x)$ كثيرة حدود رئيسية.

② أثبت أن $f(x)$ لا تحللة في $Z[x]$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل ① نلاحظ بأن $gcd(1, -2, 3) = 1$

بالتالي $f(x)$ كثيرة حدود أولية.

② حتى نبرهن أن $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{Z}[x]$ يكفي أن نثبت أن $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{Q}[x]$ وذلك حسب برهنة غاوس

نلاحظ أن $\mathbb{Q}$ حقل و $\deg f(x) = 2$

أصفار $f(x)$ هي: $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}\,i$

$\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}\,i$

إذن $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ ، $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$ بالتالي $f(x)$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}$

بالتالي $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{Q}[x]$

بالتالي $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{Z}[x]$ حسب برهنة غاوس.

مثال لتكن $f(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$

هل $f(x)$ تحللة أم لا في $\mathbb{Z}[x]$.

الحل $gcd(1, 1, 2) = 1 \leftarrow$ كثيرة حدود أولية $f(x)$

لندرس فيما إذا كانت $f(x)$ تحللة أم لا في $\mathbb{Q}[x]$.

$\mathbb{Q}$ حقل و $\deg f(x) = 2$

أصفار $f(x)$ هي: $\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\,i$ ، $\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\,i$

نلاحظ أن $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ و $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$

بالتالي $f(x)$ لا تملك جذر في $\mathbb{Q}$ بالتالي $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{Q}[x]$ وحسب برهنة غاوس $f(x)$ لا تحللة في $\mathbb{Z}[x]$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z