كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

تحقق أن الدالتين u, v توافقية وهل الدالة $f(z)=u+iv$ تحليلية؟

$u = 3(x^2 - y^2)$

$v = 3x^2 - y - y^3$

أ) لكي تكون توافقية يجب أن تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$6 - 6 = 0 \} \Rightarrow$ u توافقية

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$6y - 6y = 0 \} \Rightarrow$ v توافقية

* لكي تكون $f(z)$ تحليلية يجب أن تحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$6x + 3x^2 - 3y^2 \} \Rightarrow f(z)$ ليست تحليلية

* ماذا نستنتج؟

u, v ليست دوال تناظرية توافقية

- تكون تناظرية توافقية $\Rightarrow$ توافقية.

$f(z)$ تحليلية

السؤال الثاني:

في هذا التمرين الزوج u, v دالة توافقية تحقق هل u, v دال تناظرية توافقية.

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2+y^2}$$

الحل: لدينا بالفرض u, v دالة توافقية يقصد علينا إثبات أن:

تحليلية $f(z) = u + iv$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

الشرط الأول تحقق.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y} &= \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

الشرط الثاني تحقق

الدالة u, v تناظرية توافقية.

السؤال الثالث:

أوجد الدالة التوافقية بالشكل: $u = f(x.y)$

الحل:

بالفرض u توافقية تحقق معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض $t = x \cdot y$

$$\Rightarrow u = f(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(t)}{\partial x} = \frac{\partial f(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t) \frac{\partial t}{\partial x} y = \boxed{f''(t)\, y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(t)}{\partial y} = \frac{\partial f(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t) \frac{\partial t}{\partial y} \cdot x = \boxed{f''(t)\, x^2}$$

نعوض في معادلة لابلاس:

$$f''(t)\, y^2 + f''(t)\, x^2 = 0$$

$$f''(t)\,[x^2 + y^2] = 0$$

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow f''(t) = 0$$

$$f'(t) = C_1$$

$$f(t) = C_1 t + C_2$$

حيث C_1, C_2 ثوابت وبالتالي الدوال التوافقية $u = f(x,y)$ هي

$$u = C_1(x \cdot y) + C_2$$

السؤال الرابع:

احسب قيمة التكامل:

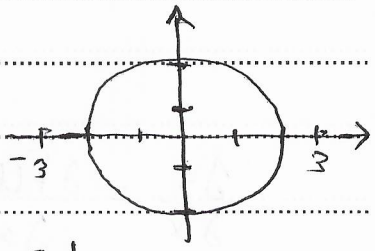
$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{chi} z}{z^2 + 4z + 3}\, dz$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$z^2+4z+3=(z+1)(z+3)$

(النقاط الشاذة) $z_0=-1$

$z_1=-3$



تقع النقطة $z_0=-1$ داخل الدائرة.

$$\int \frac{\frac{\cosh z}{z+3}}{z+1}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

$$f(z)=\frac{\cosh z}{z+3} \Rightarrow f(-1)=\frac{\cosh(-i)}{2}=\frac{\cosh i}{2}$$

بالتالي:

$$\int \frac{\frac{\cosh z}{z+3}}{z+1} = \frac{2\pi i \cosh i}{2} = \pi i \cos(i)$$

السؤال الخامس:

احسب قيمة التكامل:

$$\int_C \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz$$

وظيفة

① $C: |z|=\frac{1}{3}$

② $C: |z-1|=\frac{1}{3}$

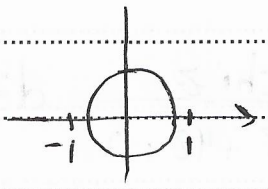
③ $C: |z|=3$

حل ①:

$z^2(z-1)=0$

$z_0=0$

$z_1=1$



النقطة $z=0$ تقع ضمن الدائرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z^2} = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

$$f(z) = \frac{\cos z}{z-1}$$

$$f'(z) = \frac{-(z-1)\sin z - \cos z}{(z-1)^2}$$

$$f'(0) = -1$$

ومنه:

$$\int \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z^2} dz = \frac{2\pi i(-1)}{1!} = \frac{-2\pi i}{1} = -2\pi i$$

السؤال الثاني:

$$\int_0^i z \cdot \cos z \, dz$$

الحل - بالتجزئة:

$$v(z) = \cos z$$

$$f(z) = z$$

وبالتالي:

$$u = f(z) = z \Rightarrow du = dz$$

$$dv = \cos z \, dz \Rightarrow v = \sin z$$

$$[u.v]_0^i - \int_0^i v \, du = [z \cdot \sin z]_0^i - \int_0^i \sin z \, dz$$

$$= i \sin i + [\cos z]_0^i = -\sinh(i) + \cosh(i) - 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الرابع:

أوجد قيمة التكامل: $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)\,dz$

الحل:

لدينا $f(z)=3z^2+2z$ دالة كلية في كل مكان بسيط

ليوجد ليشفز

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)\,dz = \left[z^3+z^2\right]_{1-i}^{2+i} = 7+19i$$

السؤال الثامن:

أوجد قيمة التكامل: $\int_C \bar{z}\,dz$ حيث $C: y=-x$

يحتوي النقط $z_1=0$ $z_2=\pi-i\pi$

الحل:

نفرض $x=t \Leftarrow y=-t \Leftarrow z=x+iy$

$z=t-it$

$\bar{z}=t+it$; $t\in[0,\pi]$

$$\int_C e^{\bar{z}}\,dz = \int_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} e^{(1+i)t}(1-i)\,dt = \frac{1-i}{1+i}\left[e^{(1+i)t}\right]_0^{\pi}$$

$$= (e^{\pi}+1)c$$

انتهت الأجابة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z