كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السلاسل في الفضاء العقدي:

ليكن لدينا: $z_1 + z_2 + z_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ...(1)

حيث: $z_n = x_n + i y_n$, $z_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, \infty}$

السلسلة (1) تتقارب فقط و فقط إذا تقاربت السلسلتين:

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots$ ...(2)

و $x_j \in \mathbb{R}$ و $j = \overline{1, \infty}$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \dots$ ...(3)

السلسلة (1) تكون متقاربة مطلقاً إذا كانت السلسلة:

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots$ متقاربة ...(4)

السلاسل 2، 3، 4 هي سلاسل بقيم حقيقية و دراسة تقاربها هي نفس الطرق التي تستخدم لدراسة تقارب السلاسل الحقيقية (دالامبير - المقارنة - كوشي ...)

مثال: ادرس تقارب السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

كلا من السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق

وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ متقاربة مطلقاً.

مثال: ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$$

متباعدة — متقاربة

فتكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$ متباعدة.

سلسلة القوى:

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \dots(5)$$

حيث كل من $c_1, c_2, \dots$ ثوابت عقدية و z هو تغير عقدي.

نظرية أبل:

إذا كانت السلسلة (5) متقاربة في النقطة $z = z_0$ بالتالي فهي متقاربة وبالتالي فهي متقاربة مطلقاً من أجل z تحقق $|z| < |z_0|$

وإذا كانت متباعدة في النقطة $z = z_1$ فهي متباعدة من أجل أي z تحقق $|z| > |z_1|$

مجال تقارب السلسلة (5) هي دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها يعطى بالعلاقة:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \Big\} \; c_n \neq 0$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \cos in\, z^n$

الحل:

لدينا: $C_n = \cos in \;,\; n = 0, 1, \dots$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\cos in|}{|\cos i(n+1)|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n \cdot \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} n \cdot \operatorname{sh} 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{th} n \operatorname{sh} 1}$$

$$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1} = e^{-1}$$

وبالتالي نصف قطر التقارب $R = e^{-1}$

ملاحظة بالحل: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{th} n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = \frac{1}{1} = 1$

مثال: أوجد نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ ، R :

الحل:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|(1+i)^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|(1+i)|^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

سلسلة تايلور:

الدالة $f(z)$ التحليلية عند النقطة $z=z_0$ وفي جوارها فإن سلسلة تايلور للدالة f بقوى $z-z_0$ أو حول z_0 هي سلسلة القوى:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad \cdots (7)$$

C_n هي المعاملات والتي تعطى/تحسب بالشكل:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(n)}{n!} \quad \cdots (8)$$

$n=0,1,\dots$ ؛

حيث: Γ (غالبا) دائرة مركزها النقطة z_0 أي $z=z_0$ وتقع بالكامل في جوار النقطة z_0 حيث الدالة $f(z)$ تحليلية.

- هذه الدائرة التي تم خلالها أخذ نقطة شاذة للدالة $f(z)$ قريبة من z_0 ويكون نصف قطر تقارب السلسلة (7) هي المسافة بين z_0 وأقرب نقطة شاذة للدالة $f(z)$

مثال:

من أجل الدوال $\ln(1+z)$ أو $(1+z)^{\alpha}$ يكون نصف قطر التقارب $R=1$ لسلسلة تايلور حول $z_0=0$

$$\star \ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

$$\Rightarrow \ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} \quad \cdots (9)$$

$$\star (1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)z^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))z^n}{n!}+\cdots \quad \cdots (10)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\alpha = +1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \quad \cdots(11)$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+(-z)} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad \cdots(12)$$

مثال:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$$

أوجد سلسلة تايلور في جوار $z_0 = 0$ ونصف قطر التقارب.

الحل:

$$\frac{z}{z^2-2z-3} = \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-3}$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{\frac{z}{3}-1} = \frac{-1}{3}\frac{1}{1+\left(-\frac{z}{3}\right)}$$

$$f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-\left(\frac{z}{3}\right)}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-4}{3}z + \frac{8}{9}z^2 - \frac{28}{27}z^2 + \cdots\right)$$

النقاط الشاذة هي -1 ، 3 $\Leftarrow$ نصف قطر التقارب $R = 1$

(المسافة بين z_0 وأقرب نقطة شاذة).

مثال: أوجد نصف مساحات سلسلة تايلور بقوى z لدالة $f(z) = \operatorname{tg} z$ ، ثم أوجد نصف قطر التقارب في جوار $z_0 = 0$

الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(z) = tg(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ لنبرهن أن السلسلة هي

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$C_0 = f(0) = 0$

$C_1 = f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$

$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + f^2(z)$

$f''(z) = 2 f(z) f'(z)$

$f'''(z) = 2[f'^2(z) + f(z) f''(z)]$

$f^{(4)}(z) = 2[3 f'(z) f''(z) + f(z) f'''(z)]$

$f^{(5)}(z) = 2[3 f''^2(z) + 4 f'(z) f^{(3)}(z) + f(z) f^{(4)}(z)]$

نعوض $z=0$ فنجد :

$f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 16$

$$tg\, z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \cdots$$

أقرب نقطة شاذة للدالة $\xi = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي $R = \frac{\pi}{2}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z