كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* شرطي كوشي ريمان بالاحداثيات الديكارتية (x,y):

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ (X)

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ & $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (1)

* شرطي كوشي ريمان بالاحداثيات القطبية (ρ,θ):

$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ & $\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$ (2)

الإثبات:

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$

$dz = dx + i\,dy = (d\rho)e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta} d\theta$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)d\rho + i\rho(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta$

$= \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta + i(\sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta)$

$\Rightarrow dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta$

$dy = \sin\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta$ (3)

* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{-\rho\sin\theta}$ (4)

* $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$

TEL:0931497960 - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - مكتبة A to Z

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cdot\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{1}{\rho\sin\theta} \quad (5)$$

باستخدام الشرط الأول لكوشي ريمان بالإحداثيات القطبية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow (4) = (5) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{(-1)}{\rho\sin\theta} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{\rho\sin\theta}$$

نضرب طرفي المعادلة السابقة بـ $\cos\theta\sin\theta$:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

$\Leftarrow$ بالمطابقة بين أمثال $\sin\theta$ و $\cos\theta$ في الطرفين نجد أن

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

نتيجة: إذا كان لدينا $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة كلية في $D \subset \mathbb{C}$ فالتالي تتحقق المعادلة:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

الإثبات: بما أن $f(z)$ دالة كلية فإنها تحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض (7) في الطرف اليمين من (6):

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

العلاقة صحيحة.

نتيجة: إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في D وكان القسم التخيلي صفر دوم في D فإن $f(z)=C$ حيث C ثابت.

الإثبات:

نفرض $f(z)=u+iv$ فإن $v=0$ ولنثبت أن $u=C$

بما أن الدالة تحليلية فإنها تحقق شرطي كوشي ريمان أي:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Rightarrow$$

$f(z)=C$ حيث C ثابت.

$$u=C \Leftarrow f(z)=C+i0 \Leftarrow f(z)=u+iv \Leftarrow$$

$f(z)=u+iv$

(الشكل القطبي) $f(z)=R(x,y)\,e^{i\Phi(x,y)}$

إذا كانت الدالة $f(z)=Re^{i\Phi}$ تحليلية فإنه:

$R(x,y)$ دالة السعة و $\Phi(x,y)$ دالة الطويلة

تحقق العلاقة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= R\frac{\partial \Phi}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial y} &= -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

الإثبات:

$$f(z) = R e^{i\Phi} = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$
$$= R\cos\Phi + iR\sin\Phi$$
$$\Rightarrow u = R\cos\Phi \quad , \quad v = R\sin\Phi$$

بما أن $f(z)$ كلية فهي تحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \iff \frac{\partial (R\cos\Phi)}{\partial x} = \frac{\partial (R\sin\Phi)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x}\cos\Phi - R\sin\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}\sin\Phi + R\cos\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

بمطابقة أمثال $\cos\Phi$ و $\sin\Phi$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= R\frac{\partial \Phi}{\partial y}\\ -R\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

تحققت

تعريف: (الدالة التوافقية):

نسمي الدالة $\Phi(x,y)$ توافقية في المجال D إذا كانت تملك مشتقات جزئية مستمرة حتى المرتبة الثانية وتحقق معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$u = x^2 + 2x - y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وبالتالي الدالة توافقية.

* إذا كانت $f(z) = u + iv$ تحليلية في D بالتالي فإنّ كل الدالتين $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ هي دوال توافقية في هذا المجال والعكس غير صحيح دائماً.

* إذا كانت u_1, u_2 دالتين توافقيتين كيفيتين بالتالي الدالة $f(z) = u_1 + i u_2$ ليس بالضرورة تحليلية، وحتى تكون تحليلية يجب تحقق شرطي كوشي ريمان.

مثال: تحقق أن الدالتين $u = x$ ، $v = -y$ توافقية وهل الدالة $f(z) = u + iv$ تحليلية.

الحل:

$u = x \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

بالتالي u دالة توافقية.

$v = -y \Rightarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

بالتالي v دالة توافقية

$$f(z) = u + iv = x - iy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

شرط كوشي الأول غير محقق وبالتالي الدالة غير تحليلية

تمرين: أوجد كل الدوال التوافقية بالشكل $u = f(x^2 + y^2)$ مع ذكر الثوابت.

الحل: نفرض $t = x^2 + y^2 \Rightarrow u = f(t)$

بما أن الدالة u توافقية بالتالي المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية موجودة ومستمرة ومحقق العبارة التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(t)}{\partial y^2} = 0 \quad ...(1)$$

$$* \quad \frac{\partial f(t)}{\partial x} = f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(t) \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + f'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

$$* \quad \frac{\partial f(t)}{\partial y} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial y} \quad * \Rightarrow$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial y^2} = f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + f'(t)\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

$$t = x^2 + y^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx + 2y\,dy$$

نعوض في ① نجد :

$$\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] f''(t) + \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right] f'(t) = 0$$

$$(4x^2 + 4y^2) f''(t) + 4 f'(t) = 0$$

$$t f''(t) + f'(t) = 0$$

نضرب بـ $t \neq 0$

$$t^2 f''(t) + t f'(t) = 0$$

فنحصل على معادلة أولى والتي تمثل الحل العام :

$$f(t) = C_1 \ln t + C_2 \quad ; \quad C_1, C_2 = \text{Constant}$$

وبالتالي الدوال التوافقية هي :

$$f(x^2+y^2) = C_1 \ln(x^2+y^2) + C_2$$

حيث C_1, C_2 ثوابت .

مثال مهمة: الدوال u, v التوافقية والتي تحقق أن $f = u + iv$ كاملية تدعى دوال توافقية تبادلية.

تمرين : أوجد كل الدوال التوافقية :

$$u = f(x,y)$$

$$u = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$u = f(x^2 - y^2)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تكاملات الدوال ذات القيم العقدية:

إذا كانت الدالة $f(z)$ معرفة ومستمرة في المجال D و G منحني أملس يقع داخل D

إذا كان $z=x+iy$ و $f(z)=u+iv$ حيث $u(x,y)$ و $v(x,y)$ دوال حقيقية بالنسبة لـ x , y , وبالتالي تكامل الدالة $f(z)$ على G يأخذ الشكل:

$$\int_G f(z)\,dz = \int_G u\,dx - v\,dy + i\int_G v\,dx + u\,dy \quad \cdots (1)$$

التكامل $\int_G f(z)\,dz$ يتعلق بمنحني التكامل C

$$\int_C^X R\times R \int_R^V$$

نتيجة: إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية في المجال D المتعلقة بالتالي التكامل لا يتعلق بـ G و

$$\int_L f(z)\,dz = 0 \quad \cdots (2)$$

حيث:

إذا أخذ منحني أملس مغلق محتوى داخل D

* إذا كان G معطى بالمعادلة $x=x(t)$, $y=y(t)$

ونقطة البداية والنهاية تعطى بـ $t=t_0$

$t=t_1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_G f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1}$$

حيث: $z(t) = x(t) + i\,y(t)$

* إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة المغلقة D وتحوي النقاط z_0, z_1 بالتالي تحقق علاقة نيوتن ليبنز:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$

* إذا كانت الدالتين f, g تحليلية في المنطقة المغلقة D و z_0, z_1 نقاط معلومة من هذه المنطقة بالتالي التكامل بالتجزئة:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,g'(z)\,dz = \left[f(z)\,g(z)\right]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)\,f'(z)\,dz \quad \text{---(4)}$$

مثال: أوجد قيمة التكامل $\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz$

حيث C هو القطع $y = x^2$

$0 \le x \le 1$

الحل:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int v\,dx + u\,dy$$

$$1+i-2\bar{z} = 1+i-2(x-iy) = 1-2x+i(1+2y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$u = 1 - 2x$

$v = 1 + 2y$

$$\int_0^1 [(1-2x) - (1+2x^2)2x]\,dx + i\int_0^1 [(1-2x)2x + (1+2x^2)]\,dx$$

$$= -2 + \frac{4}{3}i$$

مثال: احسب قيمة التكامل: $\int_C (z^2 + 2\bar{z})\,dz$

حيث C هي $|z| = 1$ و

$0 \le \arg z \le \pi$

الحل:

نفترض أن

$z = e^{i\theta}$

$dz = ie^{i\theta}\,d\theta$

$$\int_C (z^2 + 2\bar{z})\,dz = \int_0^{\pi} ie^{i\theta}(e^{2i\theta} + 1)\,d\theta$$

$$= i\int_0^{\pi} (e^{i3\theta} + e^{i\theta})\,d\theta + \left(\frac{1}{3}e^{i3\theta} + e^{i\theta}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{-8}{2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

علامة كوشي التكاملية:

إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية على D و c حلقة مغلقة بداخلها محدودة فإن علامة كوشي التكاملية على هذه الحلقة تعطى بالشكل:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \quad ; \quad z_0 \in D \qquad (5)$$

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi i\, f(z_0)$$

تمرين: احسب قيمة التكامل باستخدام علامة كوشي التكاملية:

$$\int_c \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\,dz$$

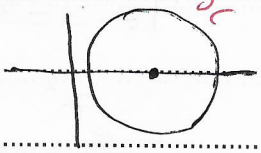
حيث

(1) $c: |z-2| = 1$

(2) $c: |z-2| = 3$

(3) $c: |z-2| = 5$

الحل:



الحل: لدينا: $z^2 - 6z = z(z-6)$

نقاط الشذوذ $\begin{pmatrix} z_0 = 0 \\ z_1 = 6 \end{pmatrix}$

(1) داخل الدائرة التي مركزها $z = 2$ ونصف قطرها 1 نجد أي نقاط شذوذ بالإضافة إلى أنّ: $f(z)$ دالة $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}$ هي دالة تحليلية داخل الحرف

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$|z-2|<1$ وبما أن جميع نقاط الدائرة تكون:

$$\int_{|z-2|=1} f(z)\,dz = 0$$

(2) داخل الدائرة $|z-2|=3$ يوجد نقطة شاذة وحيدة $z_0 = 0$ وبما أن (5) نكتب:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz = 2\pi i f_2(0)$$

حيث $f_2(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ تحليلية داخل القرص $|z-2|<3$

$$f_2(0) = \frac{e^0}{-6} = \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{|z-2|=3} \frac{f_2(z)}{z-0} = 2\pi i\, f_2(0) = -\frac{\pi}{3} i$$

(3)
$$\frac{e^{z^2}}{z^2-6z} = \frac{e^{z^2}}{z(z-6)} = \frac{e^{z^2}}{6}\,\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\,\frac{e^{z^2}}{z}$$

لدينا $f_3 = e^{z^2}$ تحليلية داخل القرص $|z-2|<5$

$$\int_{|z-2|<5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \frac{1}{6}\int_{|z-2|<5} \frac{e^{z^2}}{z-6}\,dz - \frac{1}{6}\int \frac{e^{z^2}}{z}\,dz$$

$$= \frac{1}{6}(2\pi i) f_3(6) - \frac{1}{6}(2\pi i) f_3(0) = \pi i\left(\frac{e^{36}-1}{3}\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

علاقة كوشي التكاملية العامة:

من شروط مبرهنة علاقة كوشي التكامل يكون:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad n=0,1,\dots$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

مثال: أوجد التكامل الآتي:

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^3}\,dz$$

الحل:

$$= \frac{2\pi i}{n!} f^{(2)}(z_0) \qquad ; z_0=0$$

حيث $f(z) = e^{z^2}$

$$f'(z) = 2z e^{z^2} \quad \& \quad f''(z) = 2e^{z^2} + 4z^2 e^{z^2}$$

$$f''(0) = 2$$

$$\Rightarrow \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} \times 2 = 2\pi i$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة