كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة : ٤+٥+٦/نظري/د.لمى رزوق

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المنطق الإسنادي/منطق القضايا

PL-Propositional Logic

مقدمة وتعاريف:

المنطق الرياضي هو فرع من فروع الفلسفة والرياضيات يدرس قوانين التفكير السليم واستنتاج النتائج من المقدمات (المعطيات). يُعنى المنطق بكيفية بناء الحجج، وتقييم صحتها، وفهم العلاقات بين الأفكار.

المنطق الإسنادي (منطق القضايا)PL-Propositional Logic هو فرع من المنطق الرياضي يُعنى بدراسة القضايا التي يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة. يُستخدم في **تصميم الدارات المنطقية** في الحوسبة الإلكترونية، حيث تُترجم العمليات المنطقية إلى **بوابات منطقية** مثل بوابات AND و OR و NOT . كما يُستخدم في **البرمجة** لتحديد الشروط والمنطق الذي يحدد سير العمليات في الخوارزميات.

يتعامل المنطق الإسنادي مع العبارات المنطقية التي تُسمى **القضايا** (Propositions):

القضية المنطقية Proposition: تُعرّف بأشكال مختلفة، منها:

- هي كل عبارة خبرية، يمكن الحكم عليها بالصدق أو الكذب.
- هي كل جملة مفيدة ذات معنى، يمكن الحكم عليها بشكل لا لبس فيه إن كانت صحيحة True1 أم خاطئةFalse 0.

أمثلة:

عبارات هي قضايا	عبارات ليست قضايا
السّماء صافية.	ما أجمل السّماء!
5 عدد زوجي.	هل عاد المسافر؟
مياه البحار مالحة.	راجعْ دروسك.
كل الطلاب ناجحون.	رب اشرح لي صدري.
بعض الناس ليسوا مثقفين.	هل الفلاسفة علماء؟
لا أحد من العلماء غير مثقّف.	كم أتمنى عودة أخي!

$2<5$ هي قضية منطقية صحيحة

$y<5$ هي **ليست** قضية منطقية (حيث لا أعلم قيمة y)

$2+2=5$ هي قضية منطقية خاطئة

نميّز نوعين من القضايا:

1-**القضية الأوليّة (الذّريّة أو البسيطة):** هي التي لا يكون أي جزء منها قضية ويمكن الحكم عليها بالصدق أو الكذب. ونرمز لها **بمتغيرات منطقية** (إسنادية أوقضوية) Propositional variables تأخذ إحدى القيمتين فقط True1 أوFalse0(مثل p وq)

2-**القضية المركبة Compound Proposition:** هي التي تتألف من قضايا أولية (أو قضايا ذرية). أي تُبنى من المتغيرات المنطقية باستخدام الروابط المنطقية.

الروابط المنطقية الأساسية (أو **العمليات المنطقية** logical operators) :

- **النفي (negation) ¬ :(NOT)**
- **التقاطع(conjunction)∧ :(AND)**
- **الاتحاد(disjunction)∨ :(OR)**
- **الاتحاد المقتصر(الاختلاف\الاستثناء) (exclusive-or) ⊕ :(XOR)**
- **الاستلزام (اللزوم أو الاقتضاء) ⇒ :(Implication)** -الأداة الشرطية
- **التكافؤ (اللزوم المزدوج) ⇔ :(Biconditional or Equivalence)** -الأداة ثنائية الشرطية

صياغة القضايا المركّبة:

القضيّة المركّبة هي القضيّة التي تتضمّن على الأقلّ قضيّتين ذرّيتين.

قيم صدق القضايا المركّبة تتحدّد بعنصرين: 1 – الرّابط المنطقي بين قضاياها الذّريّة. 2 – قيم صدق أو كذب قضاياها الذّريّة التي تتركّب منها.

- نُعطي القضايا الذّريّة رموزاً منطقية.
- نربط بينها بروابط منطقية.

الأولوية للروابط المنطقية (العمليات المنطقية) كالتالي:

1-الأقواس

2-النفي

3-التقاطع

4-الاتحاد

5-الاستلزام

6-التكافؤ

مثال1: "سقراط فيلسوف والمتنبي شاعر"

باعتبار"p " القضية الذّريّة الأولى " سقراط فيلسوف "،

و باعتبار "q" القضية الذّريّة الثانية "المتنبي شاعر"،

عندها تكون "p∧ q " هي الصيغة الرمزية للقضية المركبة المعطاة " سقراط فيلسوف والمتنبي شاعر ".

ومن جدول الحقيقة لـ $p\wedge q$ نعلم قيم صحة (صدق) القضية المركّبة المعطاة، فنجد أنها صحيحة عندما تكون القضيتين الذّريتين صحيحتين معا".

مثال2: "إذا كان سقراط فيلسوفاً وعالماً فهو حكيماً"

باعتبار "p " القضية الذّريّة الأولى " سقراط فيلسوف"،

و باعتبار "q" القضية الذّريّة الثانية " سقراط عالم"،

و باعتبار "r" القضية الذّريّة الثالثة " سقراط حكيم"،

عندها تكون " $(p\wedge q) \to r$ " هي الصيغة الرمزية للقضية المركبة المعطاة.

ومن جدول الحقيقة ل $(p\wedge q) \to r$ نعلم قيم صحة(صدق) القضية المركّبة المعطاة(وظيفة).

مثال3: "إذا كان سقراط فيلسوفاً وعالماً فهو حكيماً أو عبقرياً"

باعتبار "p " القضية الذّريّة الأولى " سقراط فيلسوف"،

و باعتبار "q" القضية الذّريّة الثانية " سقراط عالم"،

و باعتبار "r" القضية الذّريّة الثالثة " سقراط حكيم"،

و باعتبار "h" القضية الذّريّة الرابعة " سقراط عبقري"،

عندها تكون " $(p\wedge q) \to (r\vee h)$ " هي الصيغة الرمزية للقضية المركبة المعطاة.

ملاحظات:

للتعبير عن نفي القضية المركبة بأداة الربط الشرطية نكتب القضية المركبة بالصورة $\sim(p \longrightarrow q)$ لاحظ أن كتابة الأقواس هنا ضرورياً إذ أن الأقواس هنا تبين لنا أن النفي للقضية الشرطية، بينما الكتابة بالشكل $\sim p \to q$ سوف تعني أن مقدمة القضية الشرطية هي القضية المنفية فقط.

لاحظ أن القضية المركبة المكتوبة بالشكل $\sim p \wedge q \ \vee r$ تعني $(\sim p \wedge q) \vee r$ إذا ما أُحترمت قواعد الأولية وهذا يعني إجراء العمليات بالترتيب التالي: إيجاد $\sim p$ ثم إيجاد $\sim p \wedge q$ وأخيراً إيجاد $(\sim p \wedge q) \vee r$.

نُجري العمليات في القضية المُركبة $p \wedge \sim q \vee r \longrightarrow p \wedge (q \vee s)$ بالترتيب التالي:

(i) نوجد $\sim q$ (ii) نوجد $p \wedge \sim q$ (iii) نوجد $p \wedge \sim q \vee r$

(iv) $q \vee s$ ثم (v) $p \wedge (q \vee s)$ وأخيرًا

(Vii) $p \wedge \sim q \vee r \longrightarrow p \wedge (q \vee s)$.

وظيفة1: صِغ عبارة منطقية لجملة تُحبُّها، بحيث تتضمن اللزوم.

القوانين المنطقية: هي عبارة عن جمل مكونة من عدة عبارات مرتبطة فيما بينها بروابط منطقية، وهي صحيحة دوماً.

يُفسر المنطق الإسنادي كيف يمكن تركيب **جمل منطقية** معقدة من **جمل بسيطة** تتعلق بالواقع بحيث تؤدي إلى نتائج يمكن تحديد صحتها باستخدام جداول الحقيقة.

جدول الحقيقة truth table: هو أداة بسيطة تُبيّن كل النتائج الممكنة للقضايا المنطقية. وتستخدم لتقييم العبارات المنطقية وفهم سلوكها بناءً على قيم المتغيرات الأساسية.

- إذا كان لدينا n قضية منطقية ذريّة (أوليّة)، سيكون لدينا 2^n صفاً في الجدول. (سنلاحظ أنه لقضيتين لدينا $2^2=4$ صفاً)

عدد الصفوف = $2^{\text{عدد القضايا الأولية}}$

دالة القضية Propositional Function هي عبارة عن تعبير منطقي يحتوي على متغيرات يمكن أن تأخذ قيمًا معينة لتكوين قضية منطقية.

دالة القضية تصبح قضية منطقية عندما يتم استبدال المتغيرات بقيم ثابتة.

مثال: x إنسان – دالة قضية، سقراط إنسان – قضية منطقية.

تختلف عن المتغيرات المنطقية (التي ترمز للقضايا)

لتكن لدينا القضيتان المنطقيتان p وq، عندئذٍ:

جدول الحقيقية للنفي **NOT** ($\neg$ أو ~):

p	$\neg$ p
T	F
F	T

ملاحظة: $\neg\neg p = p$

جدول الحقيقية للتقاطع **AND** ($\wedge$):

p	q	$p\wedge q$	
T	T	T	**مثال:**
T	F	F	p: لدي جبن
F	T	F	q: لدي طحين
F	F	F	$p\wedge q$: لصنع شطائر الجبن <u>يجب</u> أن يكون لدي جبن وطحين
تكون النتيجة صحيحة فقط عندما تكون القضيتان صحيحتين **معاً**			

مثال: تحقق من صحة القضية التالية: العدد 9 طبيعي فردي و هو عدد أولي.

p(T)   q(F)

باعتبار p هي القضية: العدد 9 طبيعي فردي وهي قضية صحيحة T ، و q هي القضية: 9عدد أولي وهي قضية خاطئة F

بالتالي القضية المعطاة $p\wedge q$ هي **قضية خاطئة**

نتيجة: من أجل أي قضية p فإنّ: $p \wedge \neg p$ هي قضية خاطئة.

خصائص:

لتكن لدينا القضايا المنطقية p وq وr ، عندئذ:

خاصة1: التقاطع عملية تبديلية $p\wedge q = q \wedge p$

خاصة2: التقاطع عملية تجميعية $p\wedge (q\wedge r) = (p\wedge q) \wedge r$

خاصة3: $p \wedge p = p$

جدول الحقيقية للاتحاد **OR** ($\vee$):

p	q	$p\vee q$	
T	T	T	**مثال:**
T	F	T	p: عمرك فوق 18
F	T	T	q: برفقة ولي الأمر
F	F	F	$p\vee q$: يسمح بالدخول إذا كان عمرك فوق 18 <u>أو</u> برفقة ولي الأمر
النتيجة صحيحة عندما تكون إحدى القضيتين **على الأقل** صحيحة			

مثال: تحقق من صحة القضية التالية: العدد 9 طبيعي فردي أو هو عدد أولي.

q(F) p(T)

باعتبار p هي القضية: العدد 9 طبيعي فردي وهي قضية صحيحة T ، و q هي القضية: 9عدد أولي وهي قضية خاطئة F

بالتالي القضية المعطاة $p \vee q$ هي **قضية صحيحة**

نتيجة: من أجل أي قضية p فإنّ: $p \vee \neg p$ هي قضية صحيحة.

خصائص:

لتكن لدينا القضايا المنطقية p و q و r ، عندئذ:

خاصة1: الاتحاد عملية تبديلية $p \vee q = q \vee p$

خاصة2: الاتحاد عملية تجميعية $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

خاصة3: $p \vee p = p$

جدول الحقيقية ل **XOR** (⊕):

p	q	p⊕q	**مثال:**
T	T	F	p: شراء تكت طائرة عادي
T	F	T	q: شراء تكت طائرة VIP
F	T	T	p⊕q: إما تكت طائرة عادي
F	F	F	أو VIP
النتيجة صحيحة عندما تكون واحدة **فقط** من القضيتين صحيحة			

جدول الحقيقية للاستلزام بين قضيتين **implication (if,then)** (⇒ أو →):

p condition	q conclusion	p→q	**مثال:**
T	T	T	p: السماء تمطر
T	F	F	q: الأرض تبتل
F	T	T	p→q: إذا أمطرت السماء فإن الأرض ستبتل
F	F	T	(p تستلزم q)
القضية الصحيحة لا تعطي قضية خاطئة			
حين تكون المعطيات\الشروط صحيحة، فإن النتيجة يجب أن تكون صحيحة			

إنّ التمييز بين القضية ودالة القضية يقرّبنا من التمييز بين اللزوم المادي واللزوم الصوري:

اللزوم المادي واللزوم الصوري:

اللزوم بين القضايا هو **اللزوم المادي** ويرمز له عادةً ب→ (مثال: إذا كان سقراط إنسان، فهو فانٍ).

واللزوم بين دوال القضايا هو **اللزوم الصوري** وهو مطبّق في الرياضيات، ويرمز له عادةً ب⇒ (مثال: إذا كان x عدداً أكبر تماماً من الصفر، فهو أكبر تماماً من أي عدد سالب).

مثال: تحقق من صحة القضية التالية: إذا كان 4+4=9 فإنّ $\sqrt{4+4}=3$.

q(F)   p(F)

باعتبار p هي القضية: 4+4=9 وهي قضية خاطئة F، و q هي القضية: $\sqrt{4+4}=3$ وهي قضية خاطئة F

بالتالي القضية المعطاة p→q هي **قضية صحيحة**

ملاحظة: اللزوم ليس عملية تبديلية $q \to p \neq p \to q$

جدول الحقيقية للتكافؤ **Equivalence (if and only if)** (⇔أو≡):

p	q	p⇔q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

القضية الناتجة صحيحة عندما تكون القضيتين صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً

بمعنى آخر: يتحقق التكافؤ بين قضيتين عندما يكون لهما نفس قيم الحقيقة.

مثال:

p: ركوب الطائرة

q: شراء تكت

p⇔q: يمكنك ركوب الطائرة إذا وفقط إذا اشتريت تكت

ملاحظة: التكافؤ عملية تبديلية q⇔p = p⇔ q

جدول الحقيقية للعمليات كلها:

p	q	¬ p	p∧ q	p∨q	p⊕q	p→q	p⇔q
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

أو نعبّر عنه كما يلي بحيث T=1 و F=0:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1

لتكن القضيتان المنطقيتان p و q، عندئذ:

قاعدة1: نفي تقاطع قضيتين: $\neg (p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ أو نكتب $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$

قاعدة2: نفي اتحاد قضيتين: $\neg (p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ أو نكتب $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$

قانونا ديمورغان

قاعدة3: $p \to q = \neg p \vee q$

قاعدة4: نفي الاستلزام بين قضيتين: $\neg (p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$

الإثبات:

$\neg (p \Rightarrow q) = \neg (\neg p \vee q)$..................... من القاعدة 3

$= p \wedge \neg q$........................من القاعدة2

$= \neg \neg p \wedge \neg q$

مثال: انفِ القضية ((إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على مجال ما فهي مستمرة على ذلك المجال))

الحل: لنرمز لهذه القضية ب r، ولنرمز بـp للقضية (الدالة قابلة للاشتقاق على مجال ما) و بـq للقضية(الدالة مستمرة على ذلك المجال)، أي: $r = p \Rightarrow q$

ومنه: $\neg r = p \wedge \neg q$

وعندها يمكن التعبير عن القضية بالشكل:

الدالة قابلة للاشتقاق على مجال ما وغير مستمرة على ذلك المجال.

مثال (إثبات صحة قانون منطقي**):** لتكن القضيتان p و q، برهن أن $p \wedge q \Rightarrow p$ قانون منطقي.

الإثبات:

$(p \wedge q \Rightarrow p) = \neg(p \wedge q) \vee p$

$= (\neg p \vee \neg q) \vee p$

$= (\neg p \vee p) \vee \neg q \quad \longrightarrow \quad T$

$\downarrow$

T

نلاحظ أنه مهما تكن $\neg q$ (سواءً كانت صحيحة أم خاطئة)، تبقى النتيجة صحيحة لعملية الاتحاد الأخيرة.

طريقة أخرى للإثبات من خلال استعمال جدول الحقيقة:

p	q	$p\wedge q$	$p\wedge q\Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

→ القضية صحيحة دوماً

سنستخدم للبرهان إحدى الطريقتين:

1- جبر القضايا المنطقية: القوانين المنطقية (وأهمها في الجدول أدناه)

2- جداول الحقيقة: -لإثبات صحة **قانون**، يجب أن تكون كل قيم عموده صحيحة.

-لإثبات صحة **تكافؤ** بين طرفين، يجب أن يملك الطرفان نفس قيم الحقيقة.

$p\vee p\equiv p$ $p\wedge p\equiv p$	**قوانين اللاغو** **Idempotent Laws**
$p\vee q\equiv q\vee p$	**قوانين الإبدال** **Commutative Laws**
$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$	**قوانين الدمج** **Associative Laws**
$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	**قوانين التوزيع** **Distributive Laws**
$p\vee f\equiv p \quad , \quad p\wedge t\equiv p$ $p\vee t\equiv t \quad , \quad p\wedge f\equiv f$	**قوانين الوحدة** **Identity Laws**
$p\vee\sim p\equiv t \quad , \quad p\wedge\sim p\equiv f$ $\sim t\equiv f \quad , \quad \sim f\equiv t$ $\sim\sim p\equiv p$	**قوانين المكملة** **Complement Laws**
$\sim(p\vee q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)$ $\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee\sim q)$	**قوانين ديمورجان** **De Morgan's Laws**

قانونا الشرط : Conditional Law

$(1)\ p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $\qquad$ $(2)\ p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$

قانون الشرط الثنائي Biconditional Law: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \longrightarrow p)$

تمرين: باستخدام القوانين المنطقية أعد صياغة القضية الآتية بطريقة أخرى: "إذا كان اليوم هو الثلاثاء فإنّ غداً يكون الأربعاء"

الحلّ: نفرض أنّ p: اليوم هو الثلاثاء

q: غداً يكون الأربعاء

فالقضية المعطاة تكون بالشكل $p \rightarrow q$

وحيث أنّ $p \rightarrow q = \neg p \vee q$

إذاً القضية المعطاة تُصاغ بالشكل: "اليوم ليس الثلاثاء أو غداً يكون الأربعاء"

تمرين: باستخدام القوانين المنطقية أعد صياغة القضية الآتية بطريقة أخرى: "ليس صحيحاً أنّه إذا كانت السّماء لا تمطر فإنّ الشّمس تكون مشرقة"

الحلّ: نفرض أنّ p : السّماء تمطر

q : الشّمس مشرقة

فالقضية المعطاة تكون على الصورة $\neg(\neg p \rightarrow q)$

وحيث أنّ $\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q$

إذاً $\neg(\neg p \rightarrow q) = \neg p \wedge \neg q$

إذاً القضية المعطاة تُصاغ بالشكل: "السماء لا تمطر والشمس ليست مشرقة"

تمرين: باستخدام القوانين المنطقية بسّط العبارة: $(p \vee q) \wedge \sim p$

الحلّ:

$(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge (p \vee q)$ **قانون الإبدال**

$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$ **قانون التوزيع**

$\equiv f \vee (\sim p \wedge q)$ **قانون المكملة**

$\equiv \sim p \wedge q$ **قانون الوحدة**

تمرين: باستخدام جدول الحقيقة برهن صحة العلاقة: $p \rightarrow q = \sim q \rightarrow \sim p$

الحلّ:

p	q	~p	~q	p → q	~ q → ~ p
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

تعاريف:

القضية الصادقة (التكرارية-الجازمة) Tautology نرمز لها T

هي القضية المركبة التي تكون كل قيمها صحيحة T، بغض النظر عن القضايا الأوليّة المكونة لها.

القضية المتناقضة Contradiction نرمز لها F

هي القضية المركبة التي تكون كل قيمها خاطئة **F**، بغض النظر عن القضايا الأوليّة المكونة لها.

القضية التركيبية أو القابلة للتحقق

هي القضية المركبة التي ليست صادقة وليست متناقضة، أي أنّ قيمها خليط بين الصحيح والخاطئ.

ملاحظات:

- نفي القضية الصادقة هي قضية متناقضة.
- تمثل القضية الصادقة **T** (أو 1 أو **t**) العنصر المحايد بالنسبة للعملية المنطقية ($\wedge$) وهذا يعني أنها لأي قضية منطقية p يتحقق $p \wedge \mathbf{T} \equiv \mathbf{T} \wedge p \equiv p$.
- نفي القضية المتناقضة هي قضية صادقة.
- تمثل القضية المتناقضة **F** (أو 0 أو **f**) العنصر المحايد بالنسبة للعملية المنطقية ($\vee$) وهذا يعني أنها لأي قضية منطقية p يتحقق $p \vee \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \vee p \equiv p$.
- نفي القضية التركيبية هي قضية تركيبية.

مثال: في الجدول التالي نتعرف على قضايا مركبة منها قضية واحدة صادقة وأخرى متناقضة أما القضايا الأخرى فهي ليست متناقضة كما أنها ليست صادقة:

p	q	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$	$p \longrightarrow q$	$q \vee \sim p$	$q \wedge \sim p$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0

صادقة 　 متناقضة

مثال: لتكن p و q قضيتين بسيطتين، أثبت أنّ: $[\,(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)\,] \vee q$ صادقة.

الحلّ: لكي نثبت أن القضية المركبة المعطاة صادقة يجب أنّ نثبت أنها تكافئ 1 أو **T**، هذا يعني أنه علينا إثبات $[\,(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)\,] \vee q \equiv 1$ و سوف نفعل ذلك مستخدمين قوانين التكافؤات المنطقية:

$L.H.S. \equiv [(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q$

$\equiv [(\sim \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{p}) \wedge (\sim \boldsymbol{q} \vee \sim \boldsymbol{p})] \vee \boldsymbol{q}$ (التبديل)

$\equiv [\sim \boldsymbol{q} \vee (\boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{p})] \vee \boldsymbol{q}$ (التوزيع)

$\equiv [\sim \boldsymbol{q} \vee \mathbf{0}] \vee \boldsymbol{q}$ (التكميل)

$\equiv \sim \mathbf{q} \vee \mathbf{q}$ (المُحايد)

$\equiv \mathbf{1} \quad \equiv R.H.S.$ (التكميل)

مثال: لتكن p و q قضيتين بسيطتين، أثبت أنّ: $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$ قضية متناقضة.

الحلّ: لكي نثبت أن القضية المركبة المعطاة متناقضة يجب أنّ نثبت أنها تكافئ 0 أو **F** ، هذا يعني أنه علينا إثبات $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \equiv 0$ و سوف نفعل ذلك مستخدمين قوانين التكافؤات المنطقية:

$L.H.S. \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

$\equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$

(التجميع والتبديل ودي مورجان)

$\equiv [p \vee (q \wedge \sim q)] \wedge [\sim p \vee (q \wedge \sim q)]$ (التوزيع)

$\equiv [p \vee 0] \wedge [\sim p \vee 0]$ (التكميل) $\equiv \underbrace{p \wedge \sim p}_{\text{التكميل} \downarrow}$ (المُحايد) $\equiv 0 \equiv R.H.S$

وظيفة2: أعد حلّ المثالين الأخيرين باستخدام جداول الحقيقة.

الاستدلال Inference

إنّ فهم كيفية الوصول إلى النتائج باستخدام قواعد الاستدلال هو تدريب للعقل على التفكير الواضح والدقيق والمنظم ـــــ وهو جوهر الرياضيات ذاتها. ولذلك سنتعرّف على أهم قواعد الاستدلال في المنطق الإسنادي، ونرى كيف تُستخدم كأدوات ضرورية للبرهان والتحليل.

تعاريف:

الاستدلال: هو عملية استنتاج قضايا جديدة صحيحة (نتائج) من مجموعة قضايا صحيحة (معطيات).

قواعد الاستدلال(Inference Rules) هي أنماط استنتاج نعرف أنها صحيحة دائماً (valid) .

نكتب القاعدة عادة بصيغة:

$$\frac{\text{المعطيات}}{\text{النتيجة}}$$

الصفة الأساسية لقاعدة الاستدلال الصحيحة هي :**إذا كانت المعطيات صحيحة، فإن النتيجة يجب أن تكون صحيحة**، وهذا ما يسمى **بالصلاحية\الصحة**(Validity) . سنقدم أهم القواعد بتسمياتها الرسمية وصيغها المنطقية:

القواعد الأساسية للاستدلال (Basic Inference Rules)

1- قاعدة الإثبات المباشر\حذف الاقتضاء(Modus Ponens - MP)

الصيغة المنطقية:

$$\begin{array}{c} p\to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

تُقرأ: إذا كان اللزوم $p\to q$ صحيح و p قضية صحيحة، فإننا نستنتج أنّ q صحيحة ((= إذا كان لدينا لزوم(اقتضاء-شرطية) وفرض هذه اللزوم صحيح، فإن نتيجته يجب أن تكون صحيحة)).

2- قاعدة نفي التالي(Modus Tollens- MT)

الصيغة المنطقية:

$$\begin{array}{c} p\to q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

تُقرأ: إذا كان اللزوم $p\to q$ صحيح و القضية q خاطئة، فإننا نستنتج أنّ p خاطئة ((= إذا كان لدينا نتيجة الفرضية خاطئة فإنّ فرض هذه الفرضية خاطئ)).

مثال:

- إذا كان n عدداً أولياً أكبر من 2 فإنه فردي.
- العدد n ليس فردياً.

إذاً: n ليس عددًا أولياً أكبر من 2.

3- قاعدة القياس الشرطي \ تعدي الشرطية (Hypothetical Syllogism- HS)

هذه القاعدة تعبر عن خاصية **تعدي** العلاقة الشرطية.

الصيغة المنطقية:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

تُقرأ: إذا كانت p تؤدي إلى q و q تؤدي إلى r ، فإن p تؤدي إلى r.

مثال:

- إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مستطيل.
- إذا كان الشكل مستطيلًا، فإن له أربع زوايا قائمة.

النتيجة:

إذا كان الشكل مربعًا، فإنه له أربع زوايا قائمة.

4- قاعدة الفصل\حذف البديل (Disjunctive Syllogism - DS)

في حالة "أو" ، نفي أحد الخيارين يثبّت الخيار الآخر.

الصيغة المنطقية:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array} \quad \text{أو} \quad \begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$$

تُقرأ: إذا كانت p أو q صحيحة، و p خاطئة، فإن q صحيحة، والعكس صحيح.

مثال:

- العدد x إما موجب (p) أو سالب(q)
- العدد x ليس موجباً (¬p)
- النتيجة بواسطة DS العدد x سالب q .

5- قاعدة الإضافة OR (Addition - Add)

إذا عرفنا صحة قضية، فيمكننا دائماً ضمها بأي قضية أخرى باستخدام "أو". قد يبدو هذا غريباً، لكنه صحيح منطقياً لأن $p \vee q$ تكون صحيحة طالما أن p صحيحة، بغض النظر عن q .

الصيغة المنطقية:

$$\frac{p}{p \vee q}$$

تُقرأ: إذا كانت p صحيحة، فإن p أو q صحيحة.

مثال:

- $3<5$
- $3<5$ أو 7عدد ليس أولي (F)
- النتيجة بواسطة Add : هذه النتيجة صحيحة منطقيًا لأن الجزء الأول منها صحيح.

6- قاعدة الدمج AND (Conjunction - Conj)

إذا أثبتنا قضيتين منفصلتين، فيمكننا جمعهما في قضية مركبة واحدة.

الصيغة المنطقية:

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

تُقرأ: إذا كانت p صحيحة و q صحيحة، فإن p و q صحيحين معاً.

مثال:

- $\sqrt{2}$:عدد غير نسبي.(I)
- π :عدد غير نسبي.(I_π)
- النتيجة بواسطة Conj: $\sqrt{2}$ و π عددان غير نسبيين($I \wedge I_\pi$) .

7- قاعدة التبسيط\ حذف AND (Simplification - Simp)

إذا كان لدينا تقاطع صحيح، فيمكننا استخلاص أي من جزئيه.

الصيغة المنطقية:

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad \text{أو} \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

تُقرأ: إذا كانت p و q صحيحة، فإننا نستنتج أنّ q صحيحة (أوp صحيحة).

مثال:

- المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .
- النتيجة بواسطة Simp: المثلث ABC قائم.

8- قاعدة الحل OR (Resolution - Res)

الصيغة المنطقية:

$$\frac{\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg q \lor r \end{array}}{p \lor r}$$

ملاحظة: حسب قانون الشرط المكافئ لكل OR:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg p \to q \\ q \to r \end{array}}{\neg p \to r}$$

(وهي قاعدة تعدي الشرطية)

هذه القواعد (MP, MT, HS, DS, Add, Conj, Simp, Res) هي مجموعة كافية لبناء جزء كبير من البراهين في المنطق الإسنادي. حيث تمكّننا من صياغة براهين صحيحة، وتحليل الاستنتاجات بشكل منطقي، وبناء أنظمة رياضية وخوارزمية متماسكة.

اسم القاعدة	الشكل الرمزي
Modus Ponens	$(P \to Q, P \vdash Q)$
Modus Tollens	$(P \to Q, \neg Q \vdash \neg P)$
Hypothetical Syllogism	$(P\to Q, Q\to R \vdash P\to R)$
Disjunctive Syllogism	$(P\lor Q, \neg P \vdash Q)$
Simplification	$(P\land Q \vdash P)$
Conjunction	$(P, Q \vdash P\land Q)$
Addition	$(P \vdash P\lor Q)$
Resolution	$((P\lor Q),(\neg P\lor R) \vdash (Q\lor R))$

سنبرهن صحة الهدف باستخدام **خوارزمية التسلسل الأمامية** التي تنطلق من المعطيات والحقائق (الصحيحة دوماً) facts معتمدين على قواعد الاستدلال.

مسألة1:

من المقدمات\المعطيات التالية:

1. إذا كان الطالب مجتهدًا فإنه ينجح.
2. إذا نجح الطالب فإنه سيحصل على منحة.
3. الطالب مجتهد.

أثبت أن: الطالب سيحصل على منحة.

الحلّ:

<u>أولاً:</u> نُرمّز القضايا البسيطة، ولتكن كما يلي:

p: الطالب مجتهد   q: الطالب ينجح   r: الطالب يحصل على منحة

تُصبح معطيات المسألة بالشكل:

$$(1)........p \rightarrow q$$
$$(2).........q \rightarrow r$$
$$(3)...............p$$

الهدف: r

<u>ثانياً:</u> نستخدم قواعد الاستدلال للوصول للهدف

من (1) و(2)

حسب قاعدة تعدي الشرطية HS، نستنتج:

$(4)........p \rightarrow r$

يبقى لدينا:

$(3).......p$

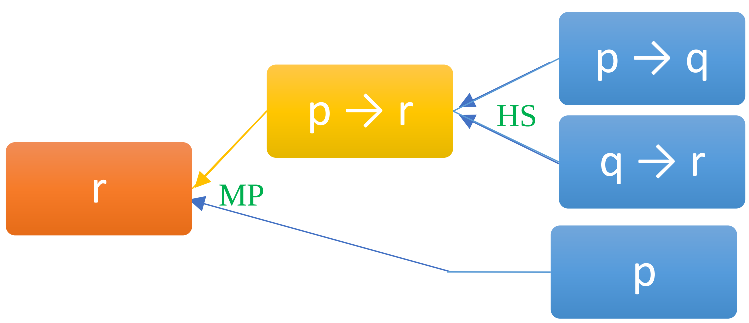
$(4)........p \rightarrow r$

من (3) و(4)

حسب قاعدة حذف الاقتضاء MP، نستنتج:

r........و هو الهدف المطلوب

يُمكن الحل وفق المخطط الشجري:



مسألة2:

إذا كان لدينا المعطيات التالية:

1. الطقس رطب.
2. إذا كان الطقس رطب فهو حار.
3. إذا كان الطقس رطب وحار فهو ممطر.

برهن أنّ الطقس ممطر.

الحلّ:

أولاً: نُرمّز القضايا البسيطة، ولتكن كما يلي:

p:الطقس رطب q:الطقس حار r:الطقس ممطر

تُصبح معطيات المسألة بالشكل:

(1)......................p

(2).............$p \to q$

(3)........$p \land q \to r$

الهدف: r

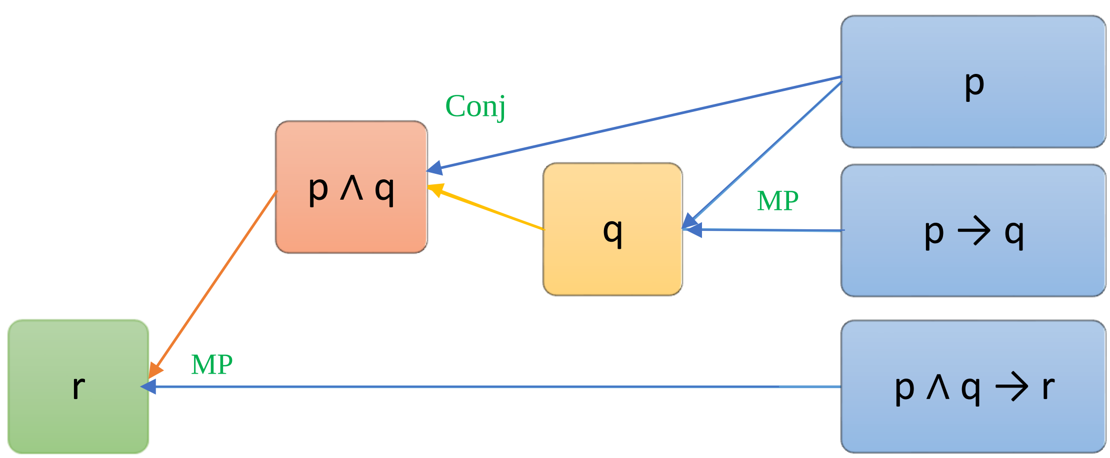
ثانياً: نستخدم قواعد الاستدلال للوصول للهدف:

من (1) و (2) باستخدام قاعدة حذف الاقتضاء: ينتج (4)...................... q

من (1) و (4) باستخدام قاعدة الدمج: نستنتج (5)................$p \land q$

من (3) و (5) باستخدام قاعدة حذف الاقتضاء: نجد الهدف r

وفق المخطط الشجري:



مسألة3: مسألة ذراع رجل آلي:

تعمل ذراع رجل آلي على البطارية، مهمتها حمل مجموعة من الأوزان، لكن هذه الذراع لا تتحرك إلّا إذا كانت البطارية مشحونة والكتلة قابلة للحمل.

برهن أنّ الوزن يكون غير قابل للحمل إذا كانت البطارية مشحونة والذراع لا تتحرك.

الحلّ:

أولاً: نُرمّز القضايا البسيطة، ولتكن كما يلي:

p:البطارية مشحونة   q:الكتلة قابلة للحمل   r:الذراع تتحرك

تُصبح معطيات المسألة بالشكل:

(1).......$p \wedge q \rightarrow r$

(2)...................p

(3).................$\neg r$

الهدف: $\neg q$

ثانياً: نستخدم قواعد الاستدلال للوصول للهدف:

(1)......... $p \wedge q \rightarrow r$

(3)................$\neg r$

حسب قاعدة نفي التالي**MT**

(4)........ $\neg (p \wedge q)$ حسب قانون ديمورغان تكافئ:

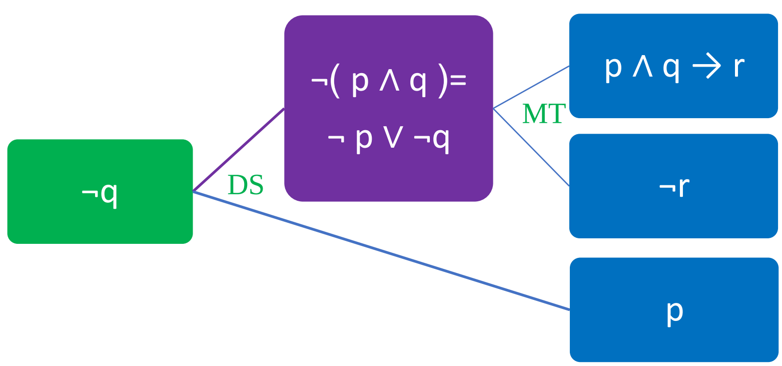
(5)........ $\neg p \vee \neg q$

(2)..................p

حسب قاعدة حذف البديل **DS**

$\neg q$ وهو الهدف المطلوب

وفق المخطط الشجري:



وظيفة3: حل هذه المسألة بطريقة أخرى (برهان جديد).

ازرعوا المحبة في قلوبكم والمعرفة في عقولكم
حتى بالحب نسمو وبالعلم نبني

د.لما رزوق