كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك١

المحاضرة : الرابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ميكانيك (1)

الحل صنزة الرابحات عاطف

السؤال الأول: يتحرك جسيم على محيط دائرة نصف قطرها $R=2m$ بتسارع مماسي ثابت مقداره $1\ m.s^{-2}$ ومبتدأ من السكون عند النقطة A على الدائرة.

والمطلوب: 1) أوجد سرعة الجسيم عند عودته إلى A، ثم احسب الزمن اللازم لذلك

2) أوجد محصلة التسارع فيه القيمة والاتجاه عند عودة الجسيم إلى A.

الحل: 1) التسارع المماسي ثابت $\Leftrightarrow$ $W_T = \frac{dv}{dt} = 1$

$\Rightarrow dv = dt \Rightarrow v = t + c$ و ($v=0$ عندما $t=0$ أي البدء من السكون)

$\Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow [v = t]$ ... (1)

لدينا $v = \frac{ds}{dt} = t \Leftrightarrow$

$s = \frac{t^2}{2} + c_1$ و ($s=0$ ، $t=0$ أي البدء عند A)

$\Rightarrow 0 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$ $\Rightarrow [s = \frac{t^2}{2}]$ ... (2)

بتعويض (1) في (2): $s = \frac{v^2}{2}$

عند عودة الجسيم إلى A كان قد قطع قوس الدائرة كاملاً أي أن $s = 2\pi R = 4\pi$

$\Rightarrow 4\pi = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{8\pi} = 2\sqrt{2\pi}\ m.s^{-1}$

وهو سرعة الجسيم عند عودته إلى A.

ولحساب الزمن الازم لذلك نعوض في (1) فنجد $v = 2\sqrt{2\pi}$

$$\Rightarrow \boxed{t = 2\sqrt{2\pi}\ s}$$ ← (وهو الزمن الازم لقطع دورة كاملة)

2) - لدينا: $w_T = 1\ m.s^{-2}$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}\Big|_{\text{عند العودة } A} = \frac{(2\sqrt{2\pi})^2}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi\ m.s^{-2}$$ و $\rho = R = 2$

$$\Rightarrow w = \sqrt{w_n^2 + w_T^2} = \sqrt{1^2 + 16\pi^2}\ \ m.s^{-2}$$

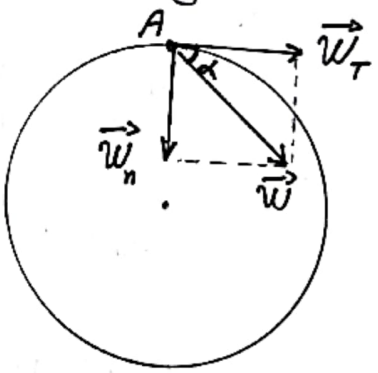
وهو محصلة التسارع في اللحظة (التسارع العددي) عند عودة الجسيم إلى A.

- محصلة التسارع في الاتجاه:

$$\tan(\alpha) = \frac{w_n}{w_T} = \frac{4\pi}{1} = 4\pi$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan(4\pi)$$

حيث α هي الزاوية التي يميل فيها التسارع الكلي عن المماس عند A.



السؤال الثاني: نقطة مادية تتحرك على المنحنى

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

حيث a ثابت

والمطلوب: ايجاد السرعة العددية ومعادلة الفاصلة المنحنية (المعادلة الذاتية للحركة) والتسارع العددي والمماسي والناظمي، ثم استنتاج نصف قطر تقوس المسار.

- لدينا السرعة العددية $\begin{cases} x' = a(1-\cos t) \\ y' = a\sin t \end{cases} \Leftarrow v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}$$

$$= a\sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{4\frac{(1-\cos t)}{2}}$$

$$= 2a\sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{v = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$ السرعة العددية

- المعادلة الزمانية للحركة :

$$s = \int v\,dt \quad \Leftarrow \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$= \int 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2a(-2)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c = -4a\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c$$

نفرض أنه عندما $t=0$ كانت $s=0$ $\Leftarrow$

$$0 = -4a\cos(0) + c \quad \Leftarrow$$

$$[c = 4a] \quad \Leftarrow$$

$$\Rightarrow s = +4a - 4a\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 4a\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \boxed{8a\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) = s(t)}$$

- التسارع العددي يعطى بالعلاقة $w = \sqrt{x''^2 + y''^2}$

$$\begin{cases} x'' = a\sin t \\ y'' = +a\cos t \end{cases} \Rightarrow w = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{w = a}$$

- التسارع المماسي :

$$w_T = \frac{dv}{dt} = a\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

- التسارع الناظمي : نعلم أن $w = \sqrt{w_T^2 + w_n^2}$.

$$\Rightarrow w_n^2 = w^2 - w_T^2 = a^2 - a^2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow w_n = a\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

- استنتاج نصف قطر التقوس ρ :

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{4a^2\sin^2(t/2)}{\rho} \Rightarrow \rho = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

مكتبة A to Z