كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الخامسة/عملي/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

1) تذكر أنه: ليكن F حقلاً و R حلقة جزئية / R ساحة صحيحة /
يعرف حقل القسمة بالشكل:

$$Q(R)=\{a/b=a.b^{-1}\in F ; a,b\in R , b\neq 0\}$$

مثال: إن مجموعة الأعداد النسبية هي حقل قسمة مجموعة الأعداد الصحيحة أي:

$$Q(\mathbb{Z})=\mathbb{Q}$$

حيث: $\mathbb{Q}=\{a/b ; a,b\in \mathbb{Z} , b\neq 0\}$

2) تذكر أنه: R حلقة تبديلية، $\phi\neq S\subseteq R$ مجموعة مغلقة ضربياً لا تحوي قواسم للصفر، إن تمييز R بمبدأ S هو حلقة R_S مزودة بهومومورفيزم $\phi : R \to R_S$ بحيث أنه $\forall a\in R_S$ فإنه:

$$a=\phi(b).\phi(c)^{-1} \quad ; \quad b\in R , c\in R$$

و $\phi(c)$ عنصر له مقلوب في R_S

السؤال: لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة المألوفة، أثبت:
a) المجموعة $S=\{1,p,p^2,p^3,\dots\}$ وهي مجموعة القوى الصحيحة الموجبة للعدد الأولي $p\in \mathbb{Z}$
أثبت أن S مغلقة ضربياً.

(b) أثبت أن:

$R_s = \{a/b : a \in \mathbb{Z} , b = p^m ; m \in \mathbb{N}\}$

أثبت أن R_s هو تحسين $\mathbb{Z}$ بمبرأ ث S

الحل:

إن $\mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة المزودة بعمليتي الجمع والجداء المألوفتين هي حلقة تبديلية

(a) $S = \{1, p, p^2, \dots\}$

هي مجموعة مغلقة ضربياً ونقصد بالمجموعة المغلقة ضربياً بأنها المجموعة التي يكون جداء أي عنصرين منها هو عنصر منها.

ولإثبات أن S مغلقة ضربياً:

$\forall\ p^n, p^m \in S \quad ; \quad n, m \in \mathbb{N}$

$p^n \cdot p^m = p^{n+m} \in S$

(b) إن R_s المعرفة سابقاً هي حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والجداء المألوفتين حيث:

$\forall\ \frac{a}{p^n} , \frac{b}{p^m} \in R_s$

$$\frac{a}{p^n} + \frac{b}{p^m} = \frac{ap^m + bp^n}{p^{n+m}} \in R_s$$

$$\frac{a}{p^n} \cdot \frac{b}{p^m} = \frac{ab}{p^{n+m}} \in R_s$$

الحيادي هو $\frac{0}{p^n}$ بالنسبة للجمع و $\frac{1}{p^0}$ بالنسبة للجداء

نعرف $\phi : \mathbb{Z} \to R_s$ بالشكل: $a \mapsto a = \frac{a}{p^0}$

((إذن ϕ هو التطبيق المطابق هنا)) $\phi(a) = a = \frac{a}{p^0}$

واضح أن ϕ معرف جيداً وأن ϕ هومومورفيزم حلقات :

$$\phi(a+b) = \frac{a+b}{p^0} = \frac{a}{p^0} + \frac{b}{p^0} = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(a.b) = \frac{a.b}{p^0} = \frac{a}{p^0} . \frac{b}{p^0} = \phi(a) . \phi(b)$$

إذن ϕ متباين لأنه :

$$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow a = b$$

ليكن $a \in R_s$ عنصراً كيفياً عندئذٍ :

حيث $a = \frac{b}{p^m}$ ، $m \in N$ ، $b \in Z$

نلاحظ أن $a = \phi(b) . \phi(p^m)^{-1}$

إذاً R_s هو تحييز Z بيبياً عن S .

سؤال : ليكن $d \neq 0, 1$ عدداً صحيحاً حراً من التربيع نعرف

$$Z[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \ ; a, b \in Z\}$$

① أثبت أن $Z[\sqrt{d}]$ حلقة جزئية من $\mathbb{C}$ (مجموعة الأعداد العقدية)

② أثبت أن حقل نسب $Z[\sqrt{d}]$ يعطى بالعلاقة

$$Q(Z[d]) = Q[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \ ; a, b \in Q\}$$

الحل :

أولاً لنثبت أن $Z[\sqrt{d}]$ حلقة جزئية من $\mathbb{C}$

بداية نقصد بمصطلح حر من التربيع أي أن d لا يقبل القسمة على مربع كامل، لإثبات أن $Z[d]$ حلقة جزئية يجب أن تكون $Z[d]$ زمرة جزئية من $\mathbb{C}$

$\forall\ a+b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $c+f\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ $\Rightarrow$

$(a+b\sqrt{d})-(c+f\sqrt{d}) = (a-c)+(b-f)\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[d]$

ويجب أن تكون $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ مغلقة بالنسبة للضرب ;

$\forall\ a+b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $c+f\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ $\Rightarrow$

$(a+b\sqrt{d}).(c+f\sqrt{d}) = (ac+bfd)+(af+bf)\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

وبالتالي $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ حلقة جزئية من $\mathbb{C}$ وهي لا تحوي بالتالي قواسم للصفر:

② نثبت أن حقل نسب $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ يعطى بالعلاقة ;

$$Q(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) = \left\{ \frac{a+b\sqrt{d}}{c+f\sqrt{d}} \ ;\ a+b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}],\ c+f\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]\setminus\{0\} \right\}$$

نتخلص من شكل المناصر عن طريق الضرب بمرافق المقام

$$\frac{a+b\sqrt{d}}{c+f\sqrt{d}} = \frac{(a+b\sqrt{d}).(c-f\sqrt{d})}{(c+f\sqrt{d})(c-f\sqrt{d})}$$

$$= \frac{(ac-bfd)+(bc-af)\sqrt{d}}{(c^2-f^2d)}$$

$$= \frac{ac-bfd}{c^2-f^2d} + \frac{bc-af}{c^2-f^2d}\sqrt{d}$$

$$= A+B\sqrt{d} \ ;\ A\in\mathbb{Q},\ B\in\mathbb{Q}$$

إذاً $Q(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ ✱

بالعكس : $\forall A + B\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$

$\Rightarrow A = \frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$ & $b \neq 0$

$B = \frac{c}{t}$; $c, t \in \mathbb{Z}$ & $t \neq 0$

$\Rightarrow A + B\sqrt{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{t}\sqrt{d} = \frac{at + bc\sqrt{d}}{bt} \in Q(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$

لأن :
$\Leftarrow \mathbb{Q} \begin{cases} at + bc\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \\ bt = bt + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[d] \end{cases}$

$\boxed{\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \subseteq Q(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])}$ $**$

من علاقتي الاحتواء $*$ و $**$ نجد أن

$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = Q(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$

انتهت المحاضرة