كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : **الخامسة/عملي/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

سنستخدم الجدول D_2 لإيجاد قيم دالة التوزيع التراكمية لمتغير عشوائي Z يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً $Z \sim N(0,1)$ وهنا نلاحظ مايلي:

(1) $p(Z \leq z) = \Phi(z)$

عندما $z > 0$

$p(Z > z) = 1 - p(Z \leq z) = 1 - \Phi(z)$

أي إن القيم التي تكتب بشكل مباشر من الجدول D_2 عندما تكون z موجبة

(2) من أجل القيم الموجبة لـ z أي عندما $z \geq 0$ فإننا نلاحظ مايلي الخط البياني لدالة كثافة الاحتمالية متناظر بالنسبة إلى y حيث $\varphi(z) = \varphi(-z)$

أي بفرض أن $z \geq 0$ فإن $z \leq 0$

تمثل المنطقتين المتناظرتين بالشكل:

$$\int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,dt = \int_{z}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow p(Z \leq -z) = p(Z \geq z) = \Phi(-z) = 1 - p(Z \leq z)$$

$$\Rightarrow \Phi(-z) = 1 - \Phi(-z)$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

نلاحظ أن أصغر قيمة لـ z في الجدول هي $-3,49$ كما نلاحظ أن

$$\Phi(-3,49) = 0,0002$$

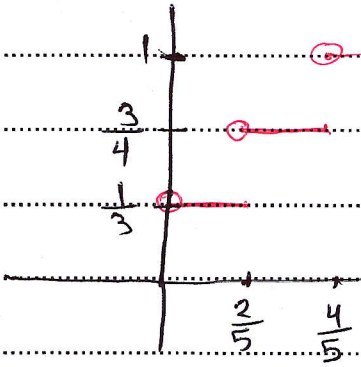
ما يعني أنه: $P(Z \leq -3.49) = 0.0002$

وبالتالي عندما يكون $Z \leq -3.5$ يمكن اعتبار أنه قيمة الاحتمال: $P(Z \leq z) = 0$ حيث: $Z \leq -3.5$

مثال: X متغير عشوائي دالة توزيعه التراكمية تعطى بالعلاقة:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{3} & ; 0 < x \leq \frac{2}{5} \\ \frac{3}{4} & ; \frac{2}{5} < x \leq \frac{4}{5} \\ 1 & ; x > \frac{4}{5} \end{cases}$$

ارسم (عبر عنه دالك بيانياً):



تحقق بأن $F(x)$ دالة توزيع تراكمية.

(1) $F(x) \geq 0$

(2) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$$P\left(-1 < X < \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \to \infty} F\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - F(-1) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* $P(X > \frac{4}{5}) = 1 - P(X < \frac{4}{5}) = 1 - F(\frac{4}{5}) = 1 - 1 = 0$

* $P(X = \frac{2}{5}) = F(\frac{2}{5}) - \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{5} - \frac{1}{n}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

* $P(X = \frac{4}{5}) = F(\frac{4}{5}) - \lim_{n\to\infty} (\frac{4}{5} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

- نذكر أن دالة التوزيع التراكمية تمكننا من استنتاج دالة التوزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي ما.

- يعرف أن X متغير عشوائي دالة توزيعه التراكمية $F(x)$ ويعرف أن B مجال عندئذ:

① $B =]-\infty, a] \Rightarrow P(x \in B) = P(]-\infty, a]) = P(X \leq a) = F(a)$

② $B =]a, b] \Rightarrow P(x \in B) \Rightarrow P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

③ $B = [a, b] \Rightarrow P(x \in B) \Rightarrow P(a \leq X \leq b) = F(b) - \lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$

④ $B =]a, b[\Rightarrow P(x \in B) \Rightarrow P(a < X < b) = \lim_{n\to\infty} F(b - \frac{1}{n}) - F(a)$

⑤ $B = [a, b[\Rightarrow P(x \in B) \Rightarrow P(a \leq X < b) = \lim_{n\to\infty} F(b - \frac{1}{n}) - \lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$

⑥ $B = [a] \Rightarrow P(X = a) \Rightarrow F(a) - \lim_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ليكن Z متغيراً عشوائياً ستمراً يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً.

احسب:

(a) $p(Z \leq -5)$

(b) $p(-2 < Z \leq 7)$

(c) $p(Z \geq 3)$

الحل:

(a) $p(Z \leq -5) = \Phi(-5) = 0$

(b) $p(-2 < Z \leq 7) = \Phi(7) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(-7) - \Phi(-2)$

نلاحظ أن $\Phi(-7) = 0$

$\Rightarrow p(-2 < Z \leq 7) = 1 - 0 - (0.0228) =$

(c) $p(Z \geq 3) = 1 - p(Z \leq 3) = 1 - [1 - p(Z \leq 3)]$

$= 1 - [1 - p(Z \leq -3)]$

$= p(Z \leq -3) = \Phi(-3) = 0.0013$

مثال: ليكن Y متغيراً عشوائياً ستمراً يتبع توزيعاً طبيعياً

$Y \sim N(-8, 4)$ احسب مايلي:

(a) $p(Y \leq -5)$

(b) $p(-2 \leq Y \leq 7)$

(c) $p(Y \geq 3)$

الحل:

(a) $p(Y \leq -5) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{-5+8}{2}\right)$

$p\left(Z \leq \frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - \Phi(-1.5) = 1 - 0.0668$

$=$

(b) $P(-2 \leq Y \leq 7) =$

$P\left(\frac{-2+8}{2} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{7+8}{2}\right)$

$P(3 \leq Z \leq \frac{15}{2}) = \phi\left(\frac{15}{2}\right) - \phi(3) = 1 - \phi\left(\frac{-15}{2}\right) - (1 - \phi(-3))$

$= 1 - 0 - 1 + \phi(-3) = 0,0013$

(c) $P(Y \geq 3) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{3+8}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{11}{2}\right)$

$= P(Z \geq 5,5) = 1 - P(Z < 5,5) = 1 - (1 - P(Z < -5,5))$

$= 0 - 0 - 0$

مثال: بفرض أن X متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالية التراكمية تعطى بالعلاقة:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x^2 & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

احسب ما يلي:

(1) $P(X \leq \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$

(2) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \lim_{n \to \infty} F(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) - F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

(3) $P(\frac{2}{5} < X < \frac{4}{5}) = \lim_{n \to \infty} F(\frac{4}{5} - \frac{1}{n}) - F(\frac{2}{5}) = \frac{16}{25} - \frac{4}{25} = \frac{12}{25}$

④ $P(X<0) = \lim_{n\to\infty} F\left(0 - \frac{1}{n}\right) = 0$

⑤ $P(X<1) = \lim_{n\to\infty} F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

⑥ $P(X<-1) = \lim_{n\to\infty} F\left(-1 - \frac{1}{n}\right) = 0$

⑦ $P(X<3) = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 1$

⑧ $P\left(X = \frac{3}{7}\right) = F\left(\frac{3}{7}\right) - \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{n}\right) = \frac{9}{49} - \frac{9}{49} = 0$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z