كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

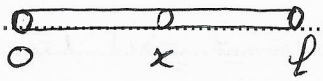
## المعادلات المكافئة: Parabolic equations

مثال على هذا النوع من المعادلات هي معادلة سريان الحرارة.
وهي من أبسط المسائل المؤدية إلى المعادلات من النوع المكافئ.
الحرارة هي نوع من أنواع الطاقة تسمى بالطاقة الحرارية حيث تنقل
الحرارة في موجات مثل الأنواع الأخرى من الطاقة.

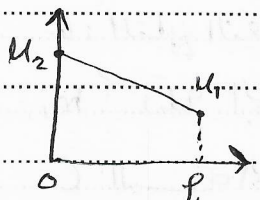
### معادلة الحرارة أحادية البعد:

### The one dimensional heat equation

ليكن لدينا سلك متجانس طوله $\ell$ مصنوع من مادة ناقلة للحرارة
معزول (حرارياً) الجوانب وعزل بشكل كافٍ لكي يمكن في أي لحظة معينة
اعتبار درجة الحرارة في جميع نقاط المقطع العرضي A واحدة.
نعتبر أن هذا السلك موضوع على المحور $x$ من $x=0$ حتى $x=\ell$




ملاحظة: إذا احتفظنا بطرفي السلك عند درجتي حرارة ثابتتين فإنه سيحدث
توزع خطي لدرجة الحرارة




$$u_x = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\ell} x$$

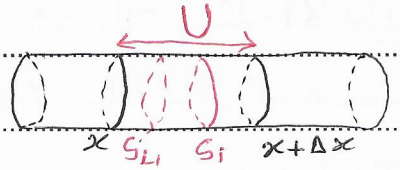
عندئذٍ تسري الحرارة من الطرف الأكثر سخونة إلى الطرف الأقل
سخونة حتى تصل إلى الاستقرار.

نفترض أن الحرارة تنتشر فقط وفق المحور $x$ وأن الحرارة التي يمكن أن تدخل أو تخرج تكون فقط من أطرافها لأنها معزولة حرارياً وبذلك يكون البناء بأية أمانية البعد.

نفترض أيضاً أن الطاقة الحرارية ثابتة داخل السلك (أي أن الحرارة المولدة تعادل الحرارة الضائعة)

لتكن $u(x,t)$ هي الدالة التي تعبر عن حرارة المقطع في النقطة $x$ واللحظة $t$.

ولتكن $U$ عبارة عن جزء من السلك طوله بين $x$ حتى $x+\Delta x$ (طوله $\Delta x$)




ولنقسم المجال $[x, x+\Delta x]$ إلى $n$ مجال جزئي طول كل منها $\Delta S$ باستخدام النقط:

$$x = S_0 < S_1 < \cdots < S_n = x + \Delta x$$

ولنأخذ الجزء $U_i$ من $U$ الذي يمثل أسطوانة ارتفاعها $\Delta S$

$U_i$ يحوي حدأ نقطة بعد كافي بحيث تكون الحرارة تقريباً داخله

لسبب نظرية التوصيل الحراري أن كمية الحرارة في الجزء $U_i$ في اللحظة $t$ تعطى بالعلاقة $Q_i = C m_i u(S_i, t)$

$u$: التابع الذي يصف درجة الحرارة.

$m_i$: كتلة الجزء $U_i$

$C$: السعة الحرارية النوعية (بالتعريف هي كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة واحدة الكتلة بمقدار واحدة قياس درجة الحرارة).



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$m_i = \rho \Delta V_i$

$Q_i = c\rho u(\xi_i, t)\, \Delta V_i$

$\Delta V_i$ : حجم الجزء $U_i$

وبما أن $U_i$ عبارة عن أسطوانة ارتفاعها $\Delta s$ ومساحة قاعدتها $A$

$\Delta V = A \Delta s$

$Q_i = c\rho A u(\xi_i, t) \Delta s$

وبذلك تكون كمية الحرارة في الجزء $U$ تعطى بالعلاقة:

$$Q(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\rho A u(\xi_i, t) \Delta s$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s,t)\, ds$$

وهي كمية الحرارة الموجودة في $U$

بالمفاضلة بالنسبة للزمن

$$\frac{dQ}{dt} = \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u_t(s,t)\, ds$$

بفرض $u$ يقابل الاشتقاق بشكل مستمر عندها يمكن أن نطبق نظرية القيمة الوسطى للتكامل:

$$x < \eta < x + \Delta x$$

$$\int_x^{x+\Delta x} u_t(s,t)\, ds = \Delta s\, u_t(\eta, t)$$

وبالتالي يكون تغير كمية الحرارة في $U$ بالنسبة للزمن يعطى بالعلاقة:



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dQ}{dt} = c\rho A \Delta x\, U_t(x,t)$$

* من جهة ثانية باستخدام قانون فوريه: فإن كمية الحرارة الداخلة خلال أي مقطع في السلك تتناسب مع مساحة المقطع A ومع $-U_x(x,t)$

ملاحظة: إذا كانت درجة الحرارة تزداد بازدياد x هذا يعني أن الحرارة تكون أكبر على اليمين $U_x > 0$ وبذلك يكون جريان الحرارة إلى اليسار من الأسخن إلى الأبرد وهذا يفرض وجود إشارة سالبة.

وبذلك تكون كمية الحرارة التي تدخل U عبر المقطع في x

$$-kAU_x(x,t)$$

k: هو معامل التوصيل الحراري للسلك.

كمية الحرارة التي تخرج من U عبر المقطع $x+\Delta x$

$$-kAU_x(x+\Delta x,t)$$

وبالتالي كمية الحرارة الداخلة في U هي:

$$-kAU_x(x,t) - (-kAU_x(x+\Delta x),t)$$

بالتالي:

$$c\rho A\Delta x\, U_t(x,t) = -kAU_x(x,t) - (-kAU_x(x+\Delta x,t))$$

نقسم على $c\rho A\Delta x$ ونجعل $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow U_t(x,t) = \frac{k}{c\rho}\,\frac{U_x(x+\Delta x,t) - U_x(x,t)}{\Delta x} = \alpha^2 U_{xx}(x,t)$$

$$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$$

$$\Rightarrow U_t = \alpha^2 U_{xx}$$

معادلة جريان الحرارة وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية خطية متجانسة وناقصية.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التعبير الذي تمثله معادلة الحرارة:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 \le x \le l$$

$$0 \le t < \infty$$

$u_t$ : تغير الحرارة بالنسبة للزمن.

$u_{xx}$ : تقعر منحنى درجة الحرارة.

$$u_{xx} = \frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

$$= \frac{2}{\Delta x^2}\left(\frac{u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x, t)}{2} - u(x,t)\right)$$

(1) إذا كان معدل الحرارة النقطتين المجاورتين لـ $x$ أكبر من $u(x,t)$

بالتالي $u_{xx} > 0$

وبالتالي التحدب في النقطة موجب.

(2) إذا كان معدل حرارة النقطتين المجاورتين لـ $x$ أصغر من $u(x,t)$

بالتالي $u_{xx} < 0$

وبالتالي التحدب في النقطة $x$ يكون سالب.

(3) $u_{xx} = 0$ بالتالي لا يوجد تحدب.

ملاحظات هامة:

(1) يمكن أن تبدأ أو تنتهي الحرارة في داخل السلك ويمكن تمثيل انبعاث الحرارة بكثافة المصدر الحراري $f(x,t)$ في النقطة $x$ و اللحظة $t$ ونتيجة لتأثير هذه المصادر يضاف إلى المعادلة حد $f(x,t)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x,t)$$

$$\Rightarrow f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$$

(2) $$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u-\theta)$$

$$0 < \beta = \frac{h}{c\rho}$$

$h$ : معامل التبادل الحراري

$\theta(x,t)$ درجة حرارة الوسط الذي تحدث عنه درجة الحرارة مع فقدان أو كسب للحرارة من الجوانب

$u > \theta$ فقدان حرارة.

$u < \theta$ كسب حرارة.

(3) في حالة وجود مصادر حرارية مع تبادل حراري من الجوانب

$$f(x,t) = F_1(x,t) - h(u,\theta)$$

$\theta(x,t)$ درجة حرارة الوسط المحيط.

$h$ معامل التبادل الحراري.

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - au + f(x,t)$$

$$f(x,t) = a\theta(x,t) + \frac{F_1(x,t)}{c\rho}$$

$$a = \frac{h}{c\rho}$$

(4) معادلة الحرارة حتى يكون حلها بشكل وحيد تحتاج شرط ابتدائي واحد وشرطين حديين



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(5) يمكن أن يعطى الشرط الابتدائي بطريقتين:

a- أن يعطى بشكل صريح كتابع لـ x

$$u(x,0) = f(x)$$

حيث شرط ابتدائي تابع لـ x الذي يعبر عن درجة حرارة كل نقطة من نقاط السلك في اللحظة $t=0$.

b- تعطى درجة حرارة الطرفين الابتدائية بالتالي علينا حساب درجة الحرارة الابتدائية لكل نقطة من نقاط السلك.

فإذا كانت درجة حرارة الطرفين الابتدائية هي $T_1^0$ , $T_2^0$

نعلم أنه يحدث توزع خطي لدرجة الحرارة على طول السلك:

$$u(x,0) = T_1^0 + \frac{T_2 - T_1}{l} x = f(x)$$

(6) الشروط الحدية:

① يمكن أن تعطى درجة حرارة نهاية السلك كدالة في حالة ما $t_0 < t < T$ حيث T هي الفترة التي تتم فيها التجربة

فإذا كانت النهاية هي مثلاً $x=0$ فإن الشرط الحدي في هذه النهاية يعطى بالشكل:

$$u(0,t) = \mu(t)$$

② يمكن أن تعطى درجة الحرارة في نهاية السلك بقيمة المشتقة $\frac{\partial u}{\partial x}$

أي حسب التدفق الحراري:

$$Q = -k A u_x$$

k: معامل التوصيل الحراري.

فإذا كانت النهاية مثلاً هي $x=l$ فإن:

$$Q(l,t) = -k A u_x(l,t)$$

أو تعطى مباشرة: $u_x(l,t) = \mu(t)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

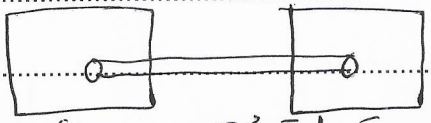
③ إذا كانت النهاية معزولة مثلاً $x=0$ بالتالي لا يوجد تدفق حراري أي $u_x(0,t)=0$

④ إذا كانت النهاية مثلاً $x=l$ يمكن أن يعطى الشرط الحدي كعلاقة خطية بين $u$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$u_x(l,t) = -\lambda\left(u(l,t) - \theta_2(t)\right)$$

حيث $\theta_2$ درجة حرارة الوسط المحيط

$\lambda = \frac{hl}{K}$



سائل درجة حرارته $\theta_1(t)$ — سائل درجة حرارته $\theta_2(t)$

لكل شرط النهاية $x=0$

$$u_x(0,t) = \lambda\left(u(0,t) - \theta_1(t)\right)$$

⑦ إذا كان سارينا حول دراسة عملية التوصيل الحراري في سلك طويل للغاية خلال فترة زمنية غير كبيرة عندها لا يكون تأثير درجة الحرارة على الحدود جوهرياً وبذلك نهمل فقط الشرط الإبتدائي.

مسألة الحرارة

شرط ابتدائي +

⑧ إذا كان جزء السلك الذي نهتم بمعالجة بدرجة حرارة يوجد بالقرب من أحد طرفي السلك بعيداً عن الطرف الآخر فإنه



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

درجة الحرارة في هذه الحالة تتحدد بالشرط الابتدائي بالإضافة إلى الشرط الحدي في الطرف القريب. ونعتبر السلك نصف لانهائي

$0 < x < \infty$ — مسألة الجرارة

شرط ابتدائي + — $u(x,t_0) = \varphi(x)$

شرط حدي واحد + — $u(0,t) = \mu(t)$

(9) إذا كانت الظاهرة تدرس في لحظات أمنية بعيدة بشكل كافٍ عن اللحظة الابتدائية فإننا درجة الحرارة عملياً تحدد بالشروط الحدية فقط:

$0 < x < l$ — المسألة

الشروط الحدية +

$u(0,t) = \mu_1(t)$

$u(l,t) = \mu_2(t)$

انتهت المحاضرة.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة