كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات — المحاضرة: 7 نظري

السنة: الثانية

المادة: تحليل رياضي 3

تمرين:

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$$

$$f_n'(x) = \frac{x}{x^2+n} \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

ادرس التقارب النقطي والمنتظم:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

الدالة $f(x)=0$ هي الدالة التي متقاربة نقطياً معها

دراسة التقارب المنتظم:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{x^2+n}\right| = \frac{|x|}{x^2+n}$$

بما أنه التابع زوجي نبحث على المجال $[0,+\infty[$ فقط.

$$g_n(x) = \frac{x}{x^2+n} \; ; \; [0,+\infty[$$

$$g'(x) = \frac{x^2+n-2x^2}{(x^2+n)^2} = \frac{n-x^2}{(x^2+n)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longleftarrow x = \sqrt{n} \Longleftarrow x^2 = n$$ عندما

$$g_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	↘	

$$\Rightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ المتالية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام.

تمرين: لدينا المتالية:

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2} \quad ; [0,1]$$

ادرس التقارب النقطي والمنتظم.

نلاحظ أنّه عندما يكون $x \in [0,1]$ $\lim_{n\to\infty} x^n\sqrt{1-x^2} = 0$

x^n هندسية عندما $x \in]0,1[$

$\lim_{n\to\infty} = 0$ أيضاً $\Leftarrow$ $\begin{cases} x=0 & \text{عندما} \\ x=1 & \text{عندما} \end{cases}$

$f_n(x)$ متقاربة نقطياً من $f(x)=0$ على $[0,1]$

عندما $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f_n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \neq 0 \in]0,1[$.

دراسة التقارب المنتظم.

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n\sqrt{1-x^2} \quad [0,1]$$

متحقق التقارب هو

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f'(x) = n x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{n \cdot x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{1 \times \sqrt{1-x^2}} - \frac{x \cdot x^n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x^{n-1}(n(1-x^2)-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{n-1}(n-nx^2-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{n-1}(n-x^2(n+1))}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{n-1}(n-x^2(n+1)) = 0$$

ولا $x^{n-1} = 0 \Rightarrow x = 0$

أو $n - x^2(n+1) = 0$

$$x^2(n+1) = n$$

$$x^2 = \frac{n}{n+1} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^n \sqrt{1-\frac{n}{n+1}} \leq \sqrt{1-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ التقارب منتظم والدالة متقاربة بانتظام من الصفر.

تمرين: لتكن الوظيفة $f(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$; $[1, +\infty[$

ولو كانت بالمجال $[0, +\infty[$ يصير لدينا مشكلة بالمجال $[0, 1]$ ونكتب الوظيفة على هذا الأساس

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بعض خواص المتتاليات المتقاربة بانتظام

الاستمرار: إذا كانت متتالية الدوال f_n متتالية من الدوال المستمرة على المجال I وكانت متقاربة بانتظام على هذا المجال فإنه دالة النهاية $f(x)$ تكون مستمرة على هذا المجال.

شرط الاستمرار عند x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

نتيجة: إذا كانت f_n متتالية من الدوال المستمرة على مجال I متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)$ غير مستمرة على I فإنه التقارب غير منتظم.

مثال:

$$f_n(x) = x^n \; ; \; [0,1]$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \quad [0,1[$$

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & : [0,1[\\ 1 & : x = 1 \end{cases}$$

غير مستمر عند 1 ← التقارب غير منتظم.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: $f_n(x) = \frac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)}$; $[0,2]$

ادرس التقارب المنتظم على هذا المجال ثم على المجال $[-2,2]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = x-2$$

على $[0,2]$

بينما على المجال $[-2,2]$ $\Leftarrow$ $f(-2)=0$ $\Leftarrow$ $x=-2$ $\Leftarrow$ $[-2,2]$

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = x-2 \quad , \quad]-2,2]$$

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & ; \ ]-2,2] \\ 0 & ; \ x=-2 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ غير مستمر عند -2

$\Leftarrow$ f_n غير متقاربة بانتظام على المجال $[-2,2]$

ندرس التقارب المنتظم على المجال $[0,2]$

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)} - (x-2)\right|$$

نضرب بـ $1+n(x+2)$ وبالاختصار نجد

$$= \left|\frac{2-x}{1+n(x+2)}\right| < \frac{2}{1+2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ملاحظة: إن شرط التقارب المنتظم لـ f_n ~~متقاربة بانتظام على المجال~~ من دالة f حيث f_n مستمرة هو شرط كافي لتكون f مستمرة ولكنه غير لازم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

على المجال $[a,b]$ متقاربة $(F_n(x))$ حيث $x \in [a,b]$ $\int_a^x f(x)dx = f(n)$

$(F_n(x)) \longrightarrow \int_a^x f(x)dx = f(n)$.

وبالتالي يمكن كتابة أي متتالية متقاربة بانتظام

ومستمرة

تمرين: لدينا متتالية f_n من الدوال معرفة على المجال

$f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{2n+1}$ على $[0,1]$

① ادرس التقارب المنتظم ثم $[0,1]$ على $S_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{2n+x}dx$

واحسب النهاية $\lim_{n\to+\infty} S_n$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2}$.

$f(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ متقاربة نقطياً من الدالة $f_n(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon : n > N_\varepsilon, x \in [0,1]$

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{ne^{-x}}{2n+x} - \frac{e^{-x}}{2} \right|$

$= \frac{xe^{-x}}{2(2n+x)} = \frac{x}{2e^4(2n+x)} < \frac{1}{4n} < \varepsilon$.

$n > \frac{1}{4\varepsilon} \Rightarrow 4n > \frac{1}{\varepsilon}$.

$\Rightarrow$ المتتالية متقاربة بانتظام

$S_n(x) = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{n \cdot e^{-x}}{2n+x}dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

$= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إنّ شرط التقارب المنتظم لـ f_n من الدالة f هو شرط كافي حتى نكتب

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ على $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

الدالة متقاربة نقطياً من $f(x)=0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 0\,dx = 0$$

ولكن f_n غير متقاربة بانتظام على $[0,1]$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة