كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) نسمي المقدار $P=\{d(x,y);\ x,y\in A\}$ قطر المجموعة A ونرمز لها بالرمز δ أي أن:

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y);\ x,y\in A\}$$

ملاحظات:

1) أيا كانت المجموعة A وأيا كانت الفضاء المتري (E,d) فإن $\delta(A)\geq 0$

2) $\delta(A)=0$ يتحقق عندما $A=\varphi$ أو A مجموعة وحيدة المنصر

3) مثال: $A=[-2,5]$

* في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R},|\ |)$ يكون $\delta(A)=7$
* في الفضاء المتري المنقطع يكون $\delta(A)=1$

مثال: لتكن $A=N((a,b),1)$ في $(\mathbb{R}^2,d)$ $\Leftarrow \delta(A)=2$

تعريف: لتكن A و B مجموعتين كيفيتين من نقاط فضاء متري (E,d) نسمي المقدار $\inf\{d(a,b);\ a\in A \& b\in B\}$ البعد بين المجموعتين A و B ويرمز له بالرمز $D(A,B)$ أو $dist(A,B)$

ملاحظات:

① أياً كانت الفضاء المتري وأياً كانت A, B فإنّ $D(A/B) \geq 0$

② إذا كانت A, B مجموعتان من نقاط الفضاء المتري (E,d) بحيث: $D(A/B)=0 \Leftarrow A \cap B \neq \varphi$

③ إذا كانت $D(A/B)=0$ ليس بالضرورة أن يكون $A \cap B \neq \varphi$

مثال يوضح ذلك:

لتكن $A=]2,4[$ و $B=[4,12]$ المجموعتان A, B غير متقاطعتين ولكن $D(A,B)=0$

④ إذا كانت $D(A,B)>0 \Leftarrow A \cap B = \varphi$

⑤ لو كانت $A=\{x\} \Leftarrow D(A/B)=D(x,B)=\inf\{d(x,b); b \in B\}$

نظرية: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) و $x \in E$ نقطة ما عندئذٍ تكون x نقطة الصقة لـ A في (E,d) إذا وفقط إذا كان $D(x,A)=0$

نتيجة 1: تكون x نقطة غير الصقة بالمجموعة A في (E,d) إذا وفقط إذا كان $D(x,A)>0$

نتيجة 2: إذا كانت A مجموعة منتهية في (E,d) فإنّه من أجل $x \in E \setminus A$ يكون $D(x,A)>0$

~~[illegible]~~

الفضاءات المترية الجزئية:

تعريف: إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً كيفياً و $\varphi \neq X$ مجموعة كيفية من نقاطه عندئذٍ فإنّ متصور تابع المسافة d على X يُعرّف تابع مسافة على X بالتالي (X,d) فضاء متري يُدعى هذا الفضاء بالفضاء المتري الجزئي من (E,d)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

* إن أي فضاء متري هو فضاء جزئي من نفسه
* إن $(\mathbb{N},|.|)$ فضاء متري جزئي من $(\mathbb{R},|.|)$ وكذلك الفضاء $([0,7],|.|)$

العلاقة بين الفضاء المتري الجزئي والفضاء المتري الكلي.

① ليكن (X,d) فضاءاً متريا جزئياً من الفضاء المتري (E,d)

* a نقطة مفروضة من نقاط (X,d)
* $\rho > 0$ عدد حقيقي موجب
* $N(a,\rho)$ كرة مفتوحة في (E,d) ذات المركز a ونصف القطر ρ
* $N^*(a,\rho)$ الكرة المفتوحة الموافقة في الفضاء الجزئي (X,d) حيث

$$N^*(a,\rho) = X \cap N(a,\rho)$$

ونكتب بأن:

$$\forall x \in N^*(a,\rho) \iff x \in X \wedge d(x,a) < \rho$$
$$\iff x \in X \wedge x \in E \wedge d(x,a) < \rho$$
$$\iff x \in X \wedge x \in N(a,\rho)$$
$$\iff x \in X \cap N(a,\rho)$$

وبشكل مشابه نجد مشابه الكرة المغلقة في (X,d)

$$B^*(a,\rho) = X \cap B(a,\rho)$$

وأيضاً بالنسبة لسطح الكرة $S^*(a,\rho) = X \cap S(a,\rho)$

② العلاقة بين المجموعات المفتوحة في الفضاء الجزئي والفضاء الكلي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية: ليكن (X,d) فضاء متري جزئي من الفضاء المتري الكلي (E,d) وليكن A مجموعة كيفية من نقاط (X,d) عندئذٍ يلزم ويكفي لكي تكون A مجموعة مفتوحة في (X,d) أنه توجد مجموعة مفتوحة في (E,d) مثل G تحقق

$$A = G \cap X$$

الاثبات: لنفرض أن مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (X,d) ولنبرهن على وجود مجموعة مفتوحة في (E,d) مثل G بحيث $A = G \cap X$

بما أن A مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (X,d) فحسب النتيجة $*$ تكون A مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري إذا وفقط إذا كانت عبارة عن اجتماع كرات مفتوحة فيه

$$A = \bigcup N^*(a,\rho)$$

ولكن حسب العلاقة بين الكرات المفتوحة بالجزئي والكلي نجد أن

$$A = \bigcup (N(a,\rho) \cap X) = (\bigcup N(a,\rho)) \cap X = G \cap X \quad ; \quad G = \bigcup N(a,\rho)$$

وتكون G مجموعة مفتوحة في (E,d) حسب النتيجة $*$ وبذلك نكون قد أثبتنا المطلوب

ولدينا G مجموعة مفتوحة في (E,d) حسب $*$

ولدينا $G = \bigcup N(a,\rho)$ ولدينا حسب الفرض

$$A = G \cap X = \bigcup N(a,\rho) \cap X = \bigcup (N(a,\rho) \cap X) = \bigcup N^*(a,\rho)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي A اجتماع لكرات مفتوحة في (X,d) فحيث مجموعة مفتوحة فيه وهو المطلوب.

③. العلاقة بين مجاورات مجموعة (نقطة) في الفضاء الجزئي و الكلي.

- ينتج مباشرة من العلاقة بين المجموعات المفتوحة

* $V^*(A)$ أسرة مجاورات المجموعة A في (X,d)
* $V(A)$ أسرة مجاورات المجموعة A في (E,d)

$\Rightarrow \exists V \in V(A),\ V^* = V \cap X$

$V^* \in V^*(A)$.

حالة خاصة بالنسبة للمجموعات:

إذا كانت X مجموعة مفتوحة في (E,d) و A مجموعة كيفية في الفضاء الجزئي (X,d) عندئذ تكون A مجموعة مفتوحة في (X,d) إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة في (E,d) وذلك لأن:

A مفتوحة في (E,d) $\Rightarrow$ A مفتوحة في (X,d)

$A = G \cap X$ حيث G مفتوحة في (E,d)

$\Leftarrow$ A مفتوحة في (E,d)

لأن A تقاطع مجموعتين مفتوحتين في (E,d)

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة