كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء المتري (E,d) ولتكن $x \in A$ نقطة ما يقال عن x أنها نقطة داخلية لـ A في الفضاء المتري (E,d) إذا وفقط إذا وجدت كرة مفتوحة $N(x,\rho)$ بحيث يكون $N(x,\rho) \subset A$

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) يقال عن المجموعة A أنها مفتوحة في الفضاء المتري (E,d) إذا وفقط إذا كان $A^\circ = A$

نظرية (دورية): إن أية كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في أي فضاء متري (E,d)

البرهان: ليكن (E,d) فضاء متري و $N(a,\rho)$ كرة مفتوحة كيفية في (E,d) ولنبرهن أن $N(a,\rho)$ مجموعة مفتوحة من أجل ذلك يكفي إثبات أن $[N(a,\rho)]^\circ = N(a,\rho)$.

* لدينا $[N(a,\rho)]^\circ \subset N(a,\rho)$ محققة دوماً في أي فضاء توبولوجي وهي محققة في أي فضاء متري (E,d)

* من جهة ثانية لنأخذ $y \in N(a,\rho)$ حسب تعريف الكرة المفتوحة $d(a,y) < \rho$ وبالتالي $\rho - d(a,y) > 0$ لنأخذ $\rho_0 = \rho - d(a,y)$ الكرة المفتوحة $N(y,\rho_0)$ وليكن $t \in N(y,\rho_0)$ حسب تعريف الكرة المفتوحة $d(t,y) < \rho_0$

إذا أ و y و t ثلاث نقاط في فضاء متري (X,d) حيث تحقق متراجحة المثلث:

$d(a,T) \leq d(a,y)+d(y,T) \leq d(a,y)+\rho$

نعوضه في ρ نجد أنّ

$d(a,T)<\rho \Leftarrow d(a,T)<d(a,y)+\rho-d(a,y)$.

هذا يعني أنّ $t \in N(a,\rho)$ ولكن t نقطة كيفية من الكرة

$N(y,\rho_0) \subseteq N(a,\rho) \subseteq N(y,\rho_0)$.

وهذا يعني بسبب تعريف النقطة الداخلية أنّ $y \in [N(a,\rho)]^\circ$ ونجد أنّ y نقطة كيفية من $N(a,\rho)$

$N(a,\rho) \subseteq [N(a,\rho)]^\circ$

من علاقة الاحتواء نجد المطلوب.

ملاحظة: إنّ عكس النظرية السابقة غير صحيح بصورة عامة ((بمعنى أنّه ليس بالضرورة كل مجموعة مفتوحة هي كرة مفتوحة في فضاء متري)).

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري المنقطع $(\mathbb{Z},d)$ $A=\{-2,2,10\}$ أثبت أنّ A مجموعة مفتوحة ولكنه ليست كرة مفتوحة

$A=\{-3\} \cup \{2\} \cup \{10\} = N(-3,\frac{1}{2}) \cup N(2,\frac{1}{3}) \cup N(10,\frac{3}{4})$

ثمّ كتابة A بشكل اجتماع لكرات مفتوحة وحسب النظرية السابقة كلّ كرة مفتوحة هي كرة مفتوحة في أي فضاء متري بالتالي A اجتماع لمجموعات مفتوحة فهي مجموعة مفتوحة.

((لأنّه في الفضاءات التبولوجية اجتماع المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة وذلك محقق أيضاً بالفضاء المتري)).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* من المعلوم شكل الكرات المفتوحة بالفضاء المتري المنقطع هي إما أو مجموعة وحيدة العنصر أو الفضاء بأكمله ولكن A لا تأخذ أي شكل من هذه الأشكال إذاً ليست كرة مفتوحة في الفضاء المتري المنقطع (X,d).

مثال: في الفضاء المتري العادي $A=]-3,4[\cup]5,12[$

A عبارة عن اجتماع لمجالين مفتوحين ومن المعلوم أن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري العادي هي مجال مفتوح إذاً A اجتماع لكرتين مفتوحتين بالتالي اجتماع لمجموعتين مفتوحتين هي ولكن A ليست مجال مفتوح فإذاً ليست كرة مفتوحة في الفضاء المتري العادي $(R,|.|)$

نتيجة: إذا كانت A مجموعة مفتوحة في الفضاء المتري (E,d) عندئذٍ يلزم ويكفي لأن تكون A مجموعة مفتوحة هو أن نكتب على شكل اجتماع لكرات مفتوحة في (E,d).

ملاحظة: من المعلوم هندسياً أن الشرط اللازم والكافي لتقاطع كرتين أن يكون البعد بين مركزيهما أصغر أو يساوي مجموع طولي نصفي قطريهما (على اعتبار التماس حالة خاصة من التقاطع).

* لكن هذا المبدأ محقق في اتجاه واحد تبولوجياً وهو أنه أياً كانت الكرتان متقاطعتين فإن البعد بين مركزيهما أصغر أو يساوي مجموع طولي نصفي قطريهما ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة بمعنى أنك قد تجد كرتين تبولوجياً البعد بين مركزيهما أصغر أو يساوي مجموع طولي نصفي قطريهما مع أن الكرتين غير متقاطعتين.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري المنقطع (E,d) نقطتين مختلفتين a و b

$$a \neq b \Rightarrow d(a,b)=1$$

من الكرة المفتوحة: $N(a,1)=\{a\}$ ، $N(b,\frac{1}{2})=\{b\}$

$$N(a,1)\cap N(b,\frac{1}{2})=\varphi$$

مع أنه $d(a,b)=1<\frac{3}{2}=\rho_1+\rho_2$

$B(a,\frac{1}{2})=\{a\}$ ، $B(b,\frac{3}{4})=\{b\}$

$B(a,\frac{1}{2})\cap B(b,\frac{3}{4})=\varphi$ ، $d(a,b)<\frac{5}{4}=\rho'_1+\rho'_2$

موضوعة هاوسدورف:

بسبب أجل كل نقطتين مختلفتين x و y من نقاط فضاء متري (E,d) توجد مجاورتان احداهما V لـ x والأخرى U لـ y في E بحيث يكون $V\cap U=\varphi$

مثال: ليكن لدينا $E=\{1,2\}$ ، $T_1=\{E,\varphi,\{1\}\}$ أي الفضاء بنقطة موضوعة هاوسدورف؟

من أجل $x=1$ ، $y=2$ $\Rightarrow x\neq y$

$$V(1)=\{\{1\},E\},\quad V(2)=\{E\}$$

$$\forall V\in V(1),\forall U\in V(2)\Rightarrow V\cap U\neq\varphi$$

في (E,T_2) $\Leftarrow$ $V(1)=\{\{1\},E\}$.

$V(2)=\{\{2\},E\}$. $\exists V=\{1\}\in V(1),\exists U=\{2\}\in V_2$

$\Rightarrow V\cap U=\varphi$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة (دورة): إنّ أي جوار لنقطة هو كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة ثمّ أنّ أي كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة وبالتالي هي مجاورة لكلّ نقطة من نقاطها.

* أما العكس ليس صحيح بالضرورة.

مثال توضيحي: في الفضاء المتري المنقطع (R,d) لنأخذ $A=\{2\}\cup\{7\}=N(2,1)\cup N(7,\frac{1}{2})$ $\Leftarrow$ $A=\{2,7\}$

A مجموعة مفتوحة لأنها تكتب على شكل اجتماع لكرات مفتوحة وبما أنّ A مجموعة مفتوحة فهي مجاورة لكلّ نقطة من نقاطها أي $A\in V(2)$.

A ليست كرة مفتوحة لأنها لا تأخذ أحد أشكال الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع

$$N(2,\rho)=\begin{cases}\varphi & ;\ \rho=0\\ \{2\} & ;\ 0<\rho\le 1\\ R & ;\ \rho>1\end{cases}$$

أي A ليست جوار للنقطة 2.

نظرية: إنّ أية كرة مغلقة في الفضاء المتري هي مجموعة مغلقة.

ملاحظة: عكس النظرية غير صحيح بصورة عامة أي ليست بالضرورة كل مجموعة مغلقة هي كرة مغلقة في الفضاء المتري (E,d).

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري المنقطع (N,d) $B=\{1,4,6\}$ لنثبت أنّ B مجموعة مغلقة ولكنها ليست كرة مغلقة.

$$B=(1,\tfrac{1}{2})\cup B(4,\tfrac{3}{4})\cup B(6,\tfrac{3}{4})$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أيه B تكتب على شكل اجتماع لكرات مفلقة وبما المعلوم كلّ كرة مفلقة هي مجموعة مغلقة بالتالي B اجتماع لمجموعات مغلقة فريه مجموعة مغلقة.

شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع إما مجموعة وحيدة العنصر أو الفضاء بأكمله ولدينا B الذي أحد جنوه الأشكال ليست كرة مغلقة.

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري الحقيقي العادي $(R,|.|)$

$A=[2,4]\cup[5,7]$ و $B=[-1,1]\cup[1,5]$

B عبارة عن مجال مغلق فريه كرة مغلقة في الفضاء المتري العادي فريه مجموعة مغلقة.

A اجتماع لمجالين مغلقين فريه اجتماع لكرتين مغلقتين أيه هي اجتماع لمجموعات مغلقة فريه مجموعة مغلقة.

A ليست كرة لذا لا تكتب على شكل مجال مغلق ✗

ملاحظة: في الفضاء المتري المنقطع (E,d) أيه مجموعة A كيفية في (E,d) تكون مغلقة ومفتوحة في آنٍ معاً.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z