كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z



2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجات العليا:

الشكل العام لهذه المعادلات:

$F(x,y,y')=0$ ..... (1) حيث $p=\frac{dy}{dx}$

$F(x,y,p)=0$ ..... (2)

حيث درجة $p$ أكبر من 1

يوضح أشكال المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة العليا.

1) معادلات محلولة بالنسبة لـ $p$ تكتب على شكل كثيرة حدود من الدرجة $n$ في $p$ حيث أن هذه المعادلات قد يمكن تحويلها إلى $n$ من عواملها خطية.

$F_n(x,y)p^n+F_{n-1}(x,y)p^{n-1}+\dots+F_1(x,y)p+F_0(x,y)=0$ ..... (3)

وتصبح المعادلة بالشكل:

$(p-f_1(x,y))(p-f_2(x,y))\dots(p-f_n(x,y))=0$ ..... (4)

وبالتالي نحصل على:

$p-f(x,y)=0 \Rightarrow p=y'=f(x,y)$ حل $g_1(x,y,c)=0$

$p-f_2(x,y)=0 \Rightarrow p=y'=f_2(x,y)$ حل $g_2(x,y,c)=0$

$p-f_n(x,y)=0 \Rightarrow p=y'=f_n(x,y)$ حل $g_n(x,y,c)=0$



مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة y

$g_1(x,y,c)\ g_2(x,y,c) \dots g_n(x,y,c)=0$

تستخدم نفس الثابتة لأن المعادلة من الرتبة الأولى

وبالتالي الحل العام لها يجب أن يحوي ثابتة اختيارية واحدة.

مثال:

$yy'^2 - (1+2xy)y' + 2x = 0.$

الحل:

نفرض $y' = p$ ونعوض

$yp^2 - (1+2xy)p + 2x = 0$

$\Delta = (1+2xy)^2 - 4y(2x)$

$= 1 + 4xy + 4x^2y^2 - 8yx$

$4x^2y^2 - 4xy + 1 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 1 - 2xy \longrightarrow p_1 = \frac{1+2xy+1-2xy}{2y} = \frac{1}{y}$

$p_2 = \frac{1+2xy-1+2xy}{2y} = \frac{4xy}{2y} = 2x.$

$y' = \frac{1}{y}.$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \longrightarrow dx = y\,dy. \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} \Rightarrow$

$\boxed{y^2 = 2x + C}$

$g_1 : y^2 - 2x - c = 0$

$y' = 2x.$

$dy = 2x\,dx \longrightarrow y = x^2 + C$

$g_2 : y - x^2 - c = 0$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(y^2-2x-c)(y-x^2-c)=0$

$F(x,y,y')=0$ ... (2)

$F(x,y,p)=0$

$x=f(x,y,y')$ ... (5) $\quad x=f(y,p)$ ... (6)

بما ضلع طرفي 5 أو 6 بالنسبة لـ y

$p=y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$

$\frac{1}{p}=\frac{dx}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$

$df=\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp$

وهي معادلة تفاضلية من رتبة أولى درجة أولى وتحلّ بالطرق التي تعلمناها سابقاً.

$\varphi(y,p,c)=0$ ... (7)

بالتالي يكون شكل 6 و شكل Z الشكل الوسيط للمعادلة الحلّ.

مثال:

$y=2xy'-yy'^2$

$x=\frac{y(1+y'^2)}{2y'}$ ، $y'=p$

$x=\frac{1+p^2}{2p}y$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{1+p^2}{2p}+\frac{yp^2-2(1+p^2)}{yp^2}\times\frac{y\,dp}{dy}$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{1-P^2}{2P} = \frac{2P^2-2}{4P^2} \cdot y \frac{dP}{dy}$$

$$\frac{-dP}{P} = \frac{dy}{y}$$

$$Ln(y) = -Ln(P) + Ln(c)$$

$$Ln(y) = Ln\left(\frac{c}{P}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{c}{P}} \quad (1) \qquad \boxed{x = \frac{1+P^2}{2P} y} \quad (2)$$

(1) و (2) يشكلان الشكل الوسيطي للحل:

$$P = \frac{c}{y} \longrightarrow x = \frac{1+\frac{c^2}{y^2}}{\frac{2c}{y}} \cdot y \quad (*)$$

وهو حل طبيعي الحل الديكارتي.

(3) معادلة تكتب محلولة بالنسبة لـ y

(8) $y = f(x, y')$ ، (9) $y = f(x, P)$

نفاضله بالنسبة لـ x.

$$P = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dx}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى يمكن نحلها على.

$$\varphi(x, P, c) = 0 \quad \ldots (10)$$

(9) و (10) الشكل الوسيطي للحل.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $y = 2y'x + x + y'^4 x^2$

$y' = P$

$y = 2Px + P^4 x^2$

$\frac{dy}{dx} = P = 2P + 2P^4 x + (2x + 2P^3 x^2) \times \frac{dP}{dx}$

$P(1 + 2P^3 x) + 2x(1 + 2P^3)\frac{dP}{dx} = 0$

$P + 2x\frac{dP}{dx} = 0 \longrightarrow 0 = \frac{2dx}{x} + \frac{2dP}{P}$

$Ln\, c = Ln\, x + 2Ln\, P$

$c = xP^2$

إذا طُلبَ الشكل الديكارتي للحل نوجد قيمة P

وهي $P = \frac{c}{x^2}$ ونعوضه بـ y

حالات خاصة من المعادلات المحلولة بالنسبة لـ y:

① حالة الإغراج.

$y = f(y')x + g(y')$

$y = f(P)x + g(P)$ ; $y' = P$

$\frac{dy}{dx} = P = f(P) + (f'(P)x + g'(P))\frac{dP}{dx}$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى بالنسبة لـ P.

يمكن اعتبار المعادلة خطية باعتبار x التابع.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Phi(x,p,c)=0$

مثال: $y'=p$ ، $y=2xy'+y'^3$

$$y=2xp+p^3 \quad \dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=p=2p+(2x+3p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$(2x+3p^2)+\frac{dx}{dp}\cdot p=0$$

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=-3p$$

$$\rho^{\int \frac{2dp}{p}}=p^2$$

نضرب بمعامل التكامل ونكامل في الحالة.

$$x=\frac{1}{p^2}\left(c+\int p^2(-3p)dp\right)$$

$$x=\frac{1}{p^2}\left(c-\frac{3}{4}p^4\right) \quad \dots (2)$$

(1) و (2) معادلة الحل بالشكل الوسيطي.

(2) معادلة كليرو.

$$y=y'x+g(y')$$

$$y'=p$$

$$y=px+g(p) \quad \dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=p=p+(x+g'(p))\frac{dp}{dx}$$

$$(x+g'(p))\frac{dp}{dx}=0$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{p = c}$ ---- (2)

(1) و (2) يعطونا الشكل الوسيطي

$y = cx + g(c)$

الحل الشاذ:

$x = g'(p) = 0$

$\boxed{x = -g'(p)}$ ---- (3)

(1) و (2) و (3) يعطونا الحل الشاذ بالشكل الوسيطي:

مثال:

$y = xy' + \sqrt{4 + y'^2}$

$y = cx + \sqrt{4 + c^2}$ ... صيغة كليرو

$g(p) = \sqrt{4 + p^2}$

$g'(p) = \frac{2p}{2\sqrt{4+p^2}} = \frac{p}{\sqrt{4+p^2}}$

انتهت المحاضرة



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة