كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: $(Z,*)$ هيكل $*$ معرفة

$\forall a,b\in Z \quad a*b=a-b$

① ادرس كون العملية $*$ مغلقة

② ادرس كون العملية $*$ تبديلية

③ ادرس كون العملية $*$ تجميعية

④ ادرس وجود العنصر الحيادي

⑤ ادرس وجود العنصر النظير

الحل:

① $\forall a,b\in Z \quad a*b=a-b \; ; \; a\in Z, b\in Z$

$\Rightarrow a-b\in Z$

$*$ عملية مغلقة

② $\forall a,b\in Z \Rightarrow a*b=a-b \neq b-a$

$a*b\neq b*a$

$*$ ليست تبديلية

③ $\forall a,b,c\in Z$

$(a*b)*c = a*(b*c)$

$(a*b)*c = (a-b)*c = a-b-c$

$a*(b*c) = a*(b-c) = a-b+c$

$*$ ليست تجميعية ، $+$

(4) وجود العنصر الحيادي:

$a * e = e * a = a$

$a * e = a \Rightarrow a - e = a \Rightarrow \boxed{e = 0} \quad \forall a \in Z$

$e * a = a \Rightarrow e - a = a \Rightarrow 0 - a = a \Rightarrow$

$-a \neq a$

لا يوجد عنصر حيادي

(5) بما أنه لا يوجد عنصر حيادي فلا يوجد عنصر نظير

التمرين الثاني:

P^+ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة مع الصفر ولنعرف العلاقة

$\forall x, y \in P^+ \quad x * y = y^x$

ادرس كون العملية $*$ مغلقة وتجميعية

الحل:

$\forall x, y \in P^+ \quad x * y = y^x \in P^+$

$*$ مغلقة

$\forall x, y, z \in P^+$

$(x * y) * z = x * (y * z)$

لنتحقق من ذلك

$L_1 \quad (x * y) * z$

$(y^x) * z = (z^{y^x})$

$L_2 \quad x * (y * z)$

$x * z^y \Rightarrow (z^y)^x$

$(z^{y^x}) \neq (z^y)^x \Rightarrow$ ليست تجميعية $*$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الثالث: ليكن $G=\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ ولنعرف على G العملية *

$a*b=a+b+a.b$

$\forall a,b\in G$

برهن أن $(G,*)$ زمرة

الحل:

$G\neq\varnothing$ واضح من تعريف العلاقة

① * مغلقة

$\forall a,b\in G \quad a*b=a+b+a.b\in G$

لأن $a\in G$ ، $b\in G$ ، $a.b\in G$

* مغلقة

② * تجميعية

$\forall a,b,c\in G$

$(a*b)*c=a*(b*c)$

$L_1=(a*b)*c$

$(a+b+ab)*c=a+b+ab+c+c(a+b+ab)$

$a+b+ab+c+ca+cb+cab$

$L_2=a*(b*c)=$

$a*(b+c+bc)=a+b+c+bc+a(b+c+bc)$

$a+b+c+bc+ab+ac+abc$

$L_1=L_2$

* تجميعية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ وجود العنصر الحيادي:

$a*e=e*a=a$

$a*e=a \Rightarrow a+e+ae=a$

$e(1+a)=0 \Rightarrow e=0$ او $a=-1$ (مرفوض)

العنصر الحيادي هو $e=0\in G$

$a*e=a$

$a*0=a \Rightarrow a+0+0a=a \Rightarrow \boxed{a=a}$

$e*a=a$

$0*a=a$

$0+a+0a=a \Rightarrow \boxed{a=a}$

$\boxed{e=0\in G}$ يوجد عنصر حيادي

④ وجود العنصر النظير هو:

$x*x'=x'*x=e$

$x*x'=e$

$x+x'+xx'=0 \Rightarrow x'(1+x)=-x$

$x'=\frac{-x}{1+x}\in G$

وهو العنصر النظير.

$x*x'=e \Rightarrow x*\frac{-x}{1+x}=0 \Rightarrow x+\frac{-x}{1+x}+\frac{-x^2}{1+x}=0$

$\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x^2}=0 \Rightarrow 0=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x' * x = e$

$\frac{-x}{1+x} * x = 0$

$\frac{-x}{1+x} + x + \frac{-x^2}{1+x} = 0$

$\frac{-x+x+x^2-x^2}{1+x} = 0 \Rightarrow x' = \frac{-x}{1+x} \in Q / \{-1\}$

نقطة مناقشة الشرط المغلقة والتجميعية

وجود العنصر الحيادي وجود العنصر النظير $(G, *)$ زمرة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة