كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الخامسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التمرين الأول:

إذا كانت $S = Q \times Q^*$ و P علاقة معرفة على S

$(r,u)(s,t) \in S$,

$(ru)\,R\,(s,t) \Leftrightarrow rt = su$ بالفرض

~~$su = pt \Rightarrow (st)\,P\,(ru)$~~

① . اثبت أن R علاقة تكافؤ.

② . جد صفوف التكافؤ.

الحل:

① . R انعكاسية

$\forall (r,u) \in S$

$\Rightarrow$

$(ru)\,R\,(r,u) \Rightarrow ru = ru$

$(ru)\,R\,(ru)$

② . R تناظرية لأن:

$(r,u),(s,t) \in S$

$(ru)\,R\,(s,t) \Leftrightarrow rt = su$ بالفرض

$su = rt \Rightarrow (st)\,R\,(ru)$

③ . R متعدية:

$(r,u),(s,t),(e,f) \in S$

$(r,u)R(s,t) \Rightarrow rt = su$ ①

$(s,t)R(e,f) \Rightarrow sf = et$ --- ②

من ② $\Rightarrow s = \frac{et}{f}$

نعوض في ① $\Rightarrow rt = \frac{et}{f}u$

$rf = eu$

$(ru)R(ef)$.

بما أنّ R انعكاسية وتناظرية ومتعدية فهي علاقة تكافؤ.

② إيجاد صفوف التكافؤ.

$(\overline{r,u}) = [(r,u)] = \{(s,t) \in S ; (r,u)R(s,t)\}$

$(\overline{r,u}) = \{(s,t) \in S \quad rt = su\}$

$(\overline{r,u}) = \{(s,t) \in S \quad r = \frac{su}{t}\}$

ثمّ احسب $[(2,3)]$

$[(2,3)] = [\ldots, (1,\frac{3}{2}), (2,3), \ldots]$

التمرين الثاني: نفرض العلاقة R على $\mathbb{Z}$

$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad a - b \leq 0\}$

اثبت أنّ R علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}$

الحلّ: R انعكاسية $\Leftarrow$

$\forall a \in \mathbb{Z} \ldots a - a \leq 0$

aRa العلاقة محققة $\Leftarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② R تخالفية

$aRb \Leftrightarrow a-b \leq 0$
$bRa \Leftrightarrow b-a \leq 0$
$\Big\} \Rightarrow a=b$

R علاقة تخالفية

③ R علاقة متعدية

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

$aRb \Leftrightarrow a-b \leq 0$
$bRc \Leftrightarrow b-c \leq 0$ بالجمع

$a-c \leq 0 \Rightarrow aRc$

R تخالفية

وهنا R انعكاسية وتخالفية ومتعدية هذا علاقة ترتيب جزئي

التمرين التالية: R معرفة على $\mathbb{N}$ تحقق العلاقة

$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad a/b\}$

أثبت أن R علاقة ترتيب جزئي.

R انعكاسية: $\forall a \in \mathbb{N} \quad a/a \Rightarrow aRa$ العلاقة محققة

R تخالفية:

$\forall a,b \in \mathbb{N}$

$aRb \Leftrightarrow a/b$
$bRa \Leftrightarrow b/a$
$\Big\} \Rightarrow \boxed{a=b}$

R متعدية:

$\forall a,b,c \in \mathbb{N}$

$aRb \Leftrightarrow a/b$
$bRc \Leftrightarrow b/c$
$\Big\} \Rightarrow a/c \Rightarrow \boxed{aRc}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مما سبق R انكاسية متخالفية متقابية مرتبة علاقة ترتيب جزئي

التمرين الرابع: لنعرف العملية * على R

$x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = x + y - 3xy - 12$

① هل العملية * تجميعية وتبديلية ومغلقة

② هل يوجد عنصر حيادي

③ هل كل عنصر من R نظير بالنسبة للعملية *

الجواب:

لنرى إذا كانت * تجميعية

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$(x * y) * z = (x + y - 3xy - 12) * z = (x + y - 3xy - 12) + z - 3z(x + y - 3xy - 12) - 12$

$x + y - 3xy - 12 + z - 3zx - 3zy + 9xzy + 36z - 12$

$x * (y * z)$

$x * [y + z - 3yz - 12]$

$x + y + z - 3yz - 12 - 3xy - 3xz + 9xyz + 36x - 12$

* ليست تجميعية

لنرى إذا كانت * تبديلية أم لا

$x * y = x + y - 3xy - 12$

$y * x = y + x - 3yx - 12 = y * x$

* تبديلية

* مغلقة

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y = x + y - 3x - 12 \in \mathbb{R}$ ← * مغلقة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2. لنرى إذا كانت يوجد عنصر حيادي أم لا

لنفرض هذا العنصر الحيادي $e \in \mathbb{R}$

$x * e = x$

$x + e - 3ex = 12$

$e(1-3x) = x - x + 12 \Rightarrow e = \frac{12}{1-3x}$

العنصر الحيادي غير موجود لأنه إذا وجد العنصر الحيادي فهو حيادي.

3. بما أنه لا يوجد عنصر حيادي فلا يوجد عنصر نظير.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة