كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

٢٠٢٦

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال (هام في التطبيقات):

لتكن المجموعة المجموعة بواقي القسمة بالقياس n

$Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$

ولنعرّف على هذه المجموعة عملية الجمع $\oplus$ بالشكل التالي

$\forall \bar{a} = \bar{b} \in Z_n : \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$

والمطلوب اثبات أنّ $(Z_n, \oplus)$ زمرة تبديلية

الحلّ:

① أولاً نتحقق أنّ $(Z_n, +)$ تحقق شروط الزمرة

P.S من تعريف Z_n نلاحظ أنّ $Z_n \neq \varnothing$

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in Z_n \Longrightarrow$ مغلقة

$\bar{a} \oplus \bar{b} \in Z_n$

لأنّ:

بما أنّ $\bar{a}, \bar{b}$ من Z_n بالتالي فإنّ a, b من Z

$a+b \in Z$ لأنّ $(Z, +)$ زمرة تبديلية $\Rightarrow \exists r \in Z_n$

بحيث أنّ $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow b \in \bar{a}$ $\Longrightarrow a+b \in r$

$\Longrightarrow \overline{a+b} = r$

ومنه $\bar{a} \oplus \bar{b} = r \in Z_n$

② العملية $\oplus$ معرّفة جيداً على عناصر Z_n أي

بقي أن نبرهن أنّ هذه العملية ليست لها علاقة

باختيار ممثّلة صفة التكافؤ أي بحيث إنه نبرهن أنّ صفة التكافؤ $\overline{a+b}$ لا يتميّز بممثلي صفّة التكافؤ أي إذا فرضنا أنّ:

$\overline{a} = \overline{a_1} \wedge \overline{b} = \overline{b_1}$

لنبرهن أنّ $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a_1} \oplus \overline{b_1}$

أو لنبرهن أنّ: $\overline{a+b} = \overline{a_1+b_1}$

بما أنّ حسب الفرضية:

$\overline{a} = \overline{a_1} \wedge \overline{b} = \overline{b_1}$

$\Rightarrow a \in \overline{a_1} \wedge b \in \overline{b_1} \Rightarrow$ حسب تعريف R

$aRa_1 \wedge bRb_1 \Rightarrow (n \mid a-a_1) \wedge (n \mid b-b_1)$

$\Rightarrow n \mid (a-a_1)+(b-b_1) \Rightarrow n \mid (a+b)-(a_1+b_1)$

$\Rightarrow a+bRa_1+b_1 \Rightarrow a+b \in a_1+b_1 \Rightarrow$ حسب تعريف العملية $\oplus$

$\overline{a+b} = \overline{a_1+b_1} \Rightarrow \overline{a} \oplus \overline{b_1}$

والعملية $\oplus$ معرفة جيداً بغضّ النظر عن اختيار ممثلي صفوف التكافؤ.

ب) العملية $\oplus$ تجميعية لأنّ

$\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_n$

$(\overline{a} \oplus \overline{b}) + \overline{c} = (\overline{a+b}) \oplus \overline{c}$

$\overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a} \oplus \overline{(b+c)}$

$\overline{a} \oplus (\overline{b} \oplus \overline{c})$

ج) إنّ الصفر هو العنصر الحيادي في $\mathbb{Z}_n$ بالنسبة للعملية $\oplus$ لأنّه من أجل أولى فإنّ $\overline{0} \in \mathbb{Z}_n$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبنفس الطريقة أثبت أن:

$\forall \bar{a} \in \bar{Z}_n : \bar{a} \oplus \bar{0} = \overline{a+0} = \bar{a} = \overline{0+a} = \bar{0} \oplus \bar{a}$

$= \bar{a}$

ولكل عنصر $\bar{a} \in \bar{Z}_n$ نظير بالنسبة للعملية $\oplus$ وهو $-\bar{a}$ لأنه من الواضح أولاً أن $-\bar{a} \in \bar{Z}_n$ وبنفس الطريقة أثبت أن:

$\bar{a} \oplus -\bar{a} = \overline{a+(-a)} = \bar{0}$

$-\bar{a} \oplus \bar{a} = \overline{-a+a} = \bar{0}$

من (أ)، (ب)، (ج)، (د)، (هـ) و (و) أن $(\bar{Z}_n)$ زمرة

ولنبرهن أن $(\bar{Z}_n)$ زمرة تبديلية.

إن العملية $\oplus$ تبديلية على عناصر $\bar{Z}_n$ لأنه:

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{Z}_n : \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \bar{b} \oplus \bar{a}$

إذاً $(\bar{Z}_n, \oplus)$ زمرة تبديلية

تمرين: لنعرف $\otimes$ على المجموعة $\bar{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ العملية $\otimes$ بالشكل:

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{Z}_n : \bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a \times b}$

تحقق فيما إذا كانت $(\bar{Z}_n, \otimes)$ زمرة تبديلية في الحالة العامة (يُكتفى بمنح إعطاء جدول كايلي).

ملاحظة (أ):

إذا كانت $(G, *)$ زمرة وكانت $*$ عملية الضرب و a عنصر ما من G و n عنصر ما من $\mathbb{N}$ حيث $(a \in G \wedge n \in \mathbb{N})$ و n عدد صحيح موجب عندئذٍ نعرف القوة a^n بأنها عنصر من G يكتب بالشكل

$a^n = a * a * a * \ldots * a$

ونصطلح أن $a^0 = e$ وكذلك نعرف

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$a^{-1} * a^{-1} * \dots * a^{-1} = (a^{-1})^n = a^{-n}$

وهذه القوة تحقق الخواص التالية

1) $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$

2) $a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

3") عندما تكون $(G, *)$ زمرة و $*$ عملية الضرب عندئذٍ يمكن أن نتبنى أحياناً عن العملية $*$ بنقطة أي $a * b = a \cdot b = ab$

3") إذا كانت $(G, *)$ زمرة وكانت $*$ عملية الجمع عنصرها الحيادي e و a عنصراً ما من G $(a \in G)$ و n عدد صحيح موجب عندئذٍ نعرف المضاعف $n.a$ بأنه عنصر من G يكتب بالشكل $n.a = a * a * a * \dots * a = n.a$ حيث n عدد مرات الجمع للصفر a من G ونحصل على أنه $0.a = e$

حيث لنا أن العنصر m هو العنصر الحيادي في G بالنسبة لعملية الجمع $*$ وأنه

$n(-a) = (-n)a$

ويحقق المضاعف $n.a$ بعض الخواص نذكر منها

1) $n(-a) = -(n.a) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

2) $n.a \times m.a = (n+m).a \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

3) $m(n.a) = (mn).a \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

خواص الزمرة:

نوضح خواص الزمرة G من خلال النظرية التالية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية: لتكن $(G,*)$ زمرة ما عندئذٍ فإنّ:

1. العنصر المحايد في G وحيد.
2. مقلوب (نظير) أي عنصر في G وحيد.
3. قانون الاختصار في G محقق أي أنّ:

$$\forall a,b,c\in G:\ ab=ac \Rightarrow b=c$$

كذلك فإنّ:

$$ba=ca \Rightarrow b=c$$

4. إذا كان $a\in G$ فإنّ $(a^{-1})^{-1}=a$.
5. إذا كان $a_1,a_2,\dots,a_n\in G$ فإنّ $(a_1*a_2*\dots*a_n)^{-1}=a_n^{-1}*a_{n-1}^{-1}*\dots*a_2^{-1}*a_1^{-1}$
6. كحالة خاصة من (5) فإنّ $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$
7. لكلّ من المعادلتين $a*x=b$ و $x*a=b$ حل وحيد في G من أجل كلّ a و b من G (تأتي في الامتحان)

البرهان

1. برهان الخاصة الأولى (برهان أنّ العنصر المحايد وحيد في G):

ليكن e و e' العنصرين المحايدين في الزمرة $(G,*)$ ولنبرهن أنّ $e=e'$ وحيد.

من أجل ذلك نفرض e و e' هما المحايدان في G بالنسبة لـ $*$ عندئذٍ فإنّ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $\forall e' \in G : e' * e = e * e' = e'$

باعتبار e عنصر حيادي

② $\forall e \in G : e' * e = e * e' = e$

باعتبار e عنصر الحيادي في G بالنسبة لـ $*$

من ① و ② نجد أنه $e' = e$ والعنصر الحيادي في G وحيد.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z