كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : **الثانية/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات

السنة: الأولى — المحاضرة: الثانية نظري

المادة: تحليل رياضي 1

ملاحظة:

sup هو الحد الأعلى الأصغري أي أصغر الحدود العليا.

inf هو الحد الأدنى الأعظمي أي أكبر الحدود الدنيا

مبرهنة: من أي متالية عددية يمكن إيجاد متتالية جزئية مضردة.

نهاية متتالية:

نقول عن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متقاربة من العدد الحقيقي $l$

حيث $l<+\infty$ إذا تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$$
$$|u_n-l|<\varepsilon \quad \forall n\in n_0$$

ويعبر عن هذا التعريف تعريف كوشي للتقارب

$$|u_n-l|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<u_n-l<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow l-\varepsilon<u_n<l+\varepsilon$$

حدود المتتالية $u_n$ تقع ضمن المجال $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

• نسمي المتتالية التي لها نهاية محدودة متقاربة ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

ملاحظة:

إذا كانت $l=\pm\infty$ أو لم يكن للمتتالية نهاية فإننا نقول أن المتتالية متباعدة

ملاحظة:

حدود المتتالية المحدودة (المتقاربة) تمثل نقاط على المحور الحقيقي



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ضمن المجال $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[$

ملاحظة:

إن وجود نهاية للمتتالية $(u_n)$ هي $l$ $\Longleftrightarrow$ أيّاً كان العدد الحقيقي $\varepsilon$ وجد عدد طبيعي $n_0$ بحيث تقع جميع حدود المتتالية

$u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, \dots$

داخل المجال $]l-\varepsilon\ ,\ l+\varepsilon[$

ويقع خارج هذا المجال عدد منتهي منها أقل أو يساوي $n_0$ من حدود المتتالية

ملاحظة:

$l$ قد تنتمي لحدود المتتالية وقد لا تنتمي

مثال حدد:

أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-5}{2n+3}=\frac{3}{2}$$

الحل:

يجب تحقق الشرط

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ /\ \left|u_n-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\ \forall n\in n_0$$

أي من أجل $\varepsilon$ تحقق $\left|u_n-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

يجب البحث عن وجود $n_0$ تحقق $n>n_0$

$$\left|u_n-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{3n-5}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{-19}{2(2n+3)}\right|<\varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{19}{2(2n+3)}\right|<\varepsilon$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{19}{\varepsilon} < 2(2n+3)$$

$$\frac{19}{2\varepsilon} < 2n+3$$

$$\frac{19}{2\varepsilon} - 3 < 2n$$

$$\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{3}{2} < n$$

$$\Rightarrow n_0 = \left[\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}\right]$$

وهو أول عدد طبيعي يلي المقدار $\left[\frac{19}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}\right]$ لأنه يجب أن يكون $n_0$ طبيعي.

مثلاً من أجل $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ⟸

$$n_0 = \left[\frac{38}{2} - \frac{3}{2}\right] = \left\{\frac{35}{2}\right\} \simeq 18$$

مثال (دوره):

أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن:

$$\lim \frac{n^2-n+3}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \ |u_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \in n_0$$

$$\left|u_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-5n+13}{3(3n^2-2n-4)}\right| < \varepsilon$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{5n-13}{3(3n^2-2n-4)} < \varepsilon$$

ملاحظة:

المقدار يقع اذا كان المقدار موجب

|المقدار| = عكس المقدار إذا كان المقدار سالب

$$|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$$\frac{5n}{3(3n^2-2n-4)} > \frac{5n+3}{3(3n^2-2n-4)}$$

$$\frac{5n}{2n^2-2n} > \frac{5n}{3n^2-2n-4}$$

$n^2-4>0$

عندما $n>2$

$$\Rightarrow \frac{5n}{n(2n-2)} < \varepsilon$$

$$\frac{5}{2n-2} < \varepsilon$$

$$\frac{5}{\varepsilon} < 2n-2$$

$$\frac{5}{2\varepsilon} + 1 < n$$

أي يوجد $n_0 = \left[\frac{5}{2\varepsilon}+1\right]$

تحقق شرط كوشي للتقارب



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

## II) متناهيات في الصغر:

نقول عن المتتالية العددية $(u_n)$ أنها لامتناهية في الصغر إذا كان

$$u_n \longrightarrow 0 \quad \text{أو} \quad n \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

يعني أن جميع حدود المتتالية تقع في جوار الصفر باستثناء عدد منتهي من الحدود

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; |u_n - 0| < \varepsilon \ \forall n \in n_0$$

مثال:

المتتالية $(u_n = \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ لامتناهية في الصغر لأن

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

## III) متناهيات في الكبر:

نقول عن المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq n_0}$ أنها لامتناهية في الكبر إذا كان

$$\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty \quad \text{أو} \quad -\infty$$

مثال: المتتالية

$$u_n = n^2 - 2n + 1$$

لامتناهية في الكبر لأن



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

## خواص المتتاليات المتقاربة:

**مبرهنة:** المتتالية العددية المتقاربة لها نهاية وحيدة.

**البرهان:**

لنفرض أنّ للمتتالية العددية نهايتين مختلفتين $l$ و $l'$ أي:

$\lim_{n\to\infty} u_n = l$ و $\lim_{n\to\infty} u_n = l'$

أي: $|u_n - l'| < \varepsilon$ / أي: $|u_n - l| < \varepsilon$

ولنبرهن أنّ $l = l'$

ليكن مثلاً $l < l'$ نختار العدد $\varepsilon = \frac{1}{4}(l' - l)$

عندئذٍ يتحقق

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0'(\varepsilon) \in \mathbb{N}; |u_n - l| < \varepsilon \ \forall n > n_0'$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0''(\varepsilon) \in \mathbb{N}; |u_n - l'| < \varepsilon \ \forall n > n_0''$

بشرطان صحيحان من أجل $n > n_0$

$n_0 = \max[n_0', n_0'']$

$|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'|$

$\leq |l - u_n| + |u_n - l'|$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{1}{2}(l' - l)$

وهذا تناقض

إذاً الفرض الكبلي خاطئ و $l = l'$

**نتيجة:** إذا كانت للمتتالية أكثر من نهاية فهي متباعدة.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ المتتالية متباعدة

مبرهنة:

المتتالية المتقاربة محدودة

بما أن المتتالية متقاربة معناه تحقق شرط كوشي للتقارب

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ و } |u_n-l|<\varepsilon \ \forall n>n_0$$

لتكون $(u_n)$ محدودة $\Leftarrow$ $|u_n|\overset{??}{\leq} k$

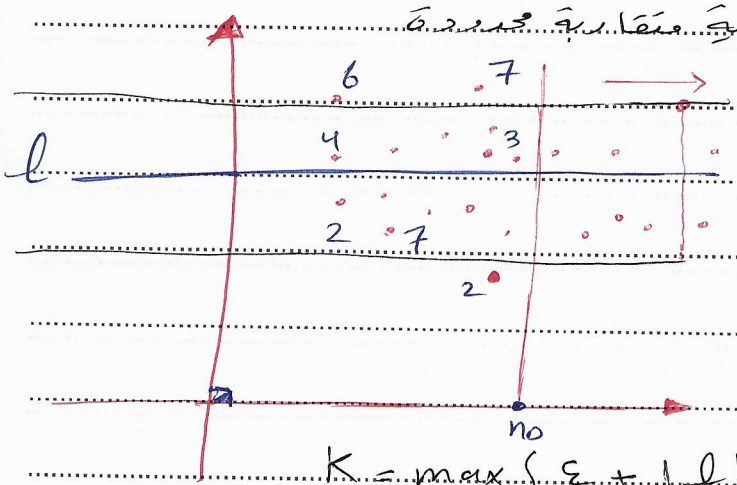
$$|u_n| = |u_n - l + l|$$
$$\leq |u_n - l| + |l|$$
$$< \varepsilon + |l| \quad \forall n>n_0$$

إذاً أمنا منضماً

$$k = \max\{\varepsilon + |l|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{n_0}|\}$$

وبالتالي $|u_n| \leq k$

ومنه يتحقق المطلوب كل متتالية متقاربة محدودة




$$k = \max\{\varepsilon + |l|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{n_0}|\}$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

إن شرط المحدودية لازم وغير كافي لمتقاربة المتتالية مثلاً:

$u_n = (-1)^n \times 1$

محدودة ولكنها ليست متقاربة

ملاحظة:

المتتالية المتقاربة تعطي محدودة والعكس غير صحيح



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z