كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

وسيطاء التوجيه للمتجه $\vec{u}$ وجيوب تمام التوجيه للمتجه $\vec{u}$:

نفرض α, β, γ هي زوايا يصنعها المتجه $\vec{u}$ مع المحاور الإحداثية:

$\alpha = (\vec{u}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{u}, \vec{j})$, $\gamma = (\vec{u}, \vec{k})$

$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{i}|}$ ، $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ و $|\vec{i}| = 1$

$\cos\beta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{j}|}$ ، $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ و $|\vec{j}| = 1$

$\cos\gamma = \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{k}|}$ ، $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ و $|\vec{k}| = 1$

تسمى α, β, γ زوايا التوجيه بين الشعاع $\vec{u}$ والمحاور الإحداثية و $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ جيوب تمام توجيه المتجه $\vec{u}$

ملاحظة: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

حالة خاصة:

إذا كان لفراغ ثنائي البعد إذاً جيوب تمام توجيه المتجه $\vec{u}$

$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ، $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

تسمى (x, y, z) $\vec{u}$ إذا x, y, z هي وسطاء التوجيه

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال 1:

أوجد معادلة الكرة التي قطرها المستقيم الواصل بين النقطتين

$M_1(1,2,3)$

$M_2(0,4,0)$

الحل:

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$

$= (-1, 2, -3) = (p, q, r)$

مركز الكرة هو

$p = -1, \quad q = 2, \quad r = -3$

نصف قطر الكرة هو

$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{u}|} = \frac{-1}{\sqrt{14}}$

$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{u}|} = \frac{2}{\sqrt{14}}$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{u}|} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$

مثال 2:

أوجد معادلة كرة المركز الذي يوازي المستوي oxy ويمر من المركز المعين بالمتجه

$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

الحل: نفرض $\vec{r}(p, q, r)$

بما أنه يوازي المستوي $oxy \Leftarrow p = q = 0$

$\Rightarrow \vec{r}(0, 0, r)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من الطرف الثاني

$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

$2 \cdot 1 + 0 = 0 \Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow \vec{v}(0,0,0)$

مثال:

إذا كانت $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

احسب $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \wedge (\vec{u} - 2\vec{v})$

$= (2\vec{u} \wedge \vec{u}) - 4(\vec{u} \wedge \vec{v}) + 3(\vec{v} \wedge \vec{u}) - 6(\vec{v} \wedge \vec{v})$

$= -4\vec{w} - 3\vec{w} = -7\vec{w}$

المستوي في الفراغ:

يتعين مستوي في الفراغ بمستقيمين متقاطعين (متجهين) أو مستقيمين أو مثلث نقاطه ليست على استقامة واحدة.

يعرّف بأنه سطح غير محدود، إذا اشترك معه بأكثر من نقطة كان المستقيم محتوى في المستوي أو طبق على المستوي.

تعيين معادلة المستوي:

الطريقة الأولى:

معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة $M(x_1, y_1, z_1)$ أو يعامد متجه $\vec{n}$

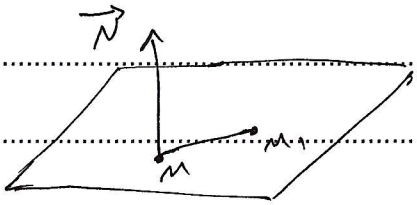
$\vec{n}(p,q,r)$ نسمي $\vec{n}$ ناظم المستوي

إذا كانت M نقطة من المستوي $\overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{N} = 0$

وهي معادلة متجه للمستوي المار بـ M_1 وعمود على $\vec{N}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أما الديكارتية هي



$$p(x-x_1)+q(y-y_1)+r(z-z_1)=0$$

$$px+qy+rz+d=0$$

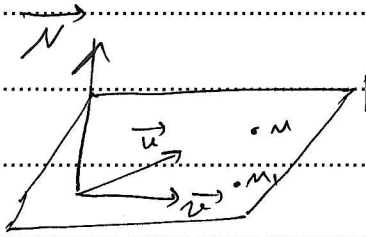
حيث

$$d=-px_1-qy_1-rz_1$$

وهي معادلة خطية بالمجاهيل (x,y,z)

الطريقة الثانية:

معادلة مستوٍ يمر بنقطة معلومة وبموازي متجهين معلومين



ليكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في هذا المستوي p

المار من $M_1(x_1,y_1,z_1)$

وبموازي للمتجهين $\vec{v}(p_1,q_1,r_1)$

$\vec{u}(p_2,q_2,r_2)$

عندئذ ترد هذه الحالة إلى الحالة السابقة بإيجاد ناظم على المستوي p

$$\vec{N}=\vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{N}=0$$

$$\overrightarrow{M_1M}(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\overrightarrow{M_1M},\vec{u},\vec{v})=0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

بعد نشر المحدد نحصل على المعادلة للمستوي المطلوب.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

اكتب معادلة مستوٍ مار بـ $M_1(3,4,-5)$

ويوازي الشعاعان

$\vec{v_1}(3,1,-1)$

$\vec{v_2}(1,-2,1)$

الحل:

الطريقة الأولى:

ناظم هذا المستوي عمودي على الشعاعان $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ أي

$$\vec{N} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1,4,7)$$

$$p: (x-3)+4(y-4)+7(z+5)=0$$

الطريقة الثانية:

$$(\overrightarrow{MM_1}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x+4y+7z+16=0$$

الطريقة الثالثة:

معادلة مستوٍ مار بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. لتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في المستوي p المار من النقط M_1, M_2, M_3

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذ المستوي P ناظمه $\vec{N}$ عمود على أشعة توجيه المستوي

$\vec{N} \cdot \vec{M_1M_2} = 0$

$\vec{N} \cdot \vec{M_1M_3} = 0$

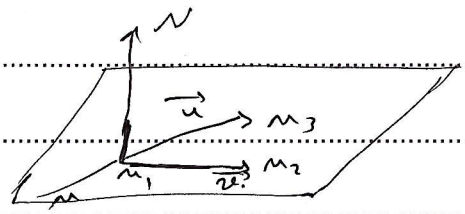
ترد الى الحالة الأولى $\vec{N} = \vec{M_1M_2} \wedge \vec{M_1M_3}$

أو ترد الى الحالة الثانية

$\vec{MM_1} \cdot \vec{N} = 0$

$= \vec{MM_1} \cdot (\vec{M_1M_2} \wedge \vec{M_1M_3})$

$(\vec{M_1M}, \vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3})$



معادلة مستوٍ ما بـ M_1 يوازي متجهين $\vec{M_1M_2}$ و $\vec{M_1M_3}$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال

أوجد معادلة مستوي ما بالنقط

$\vec{M_1}(3,-1,2)$

$\vec{M_2}(4,-1,-1)$

$\vec{M_3}(2,0,2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

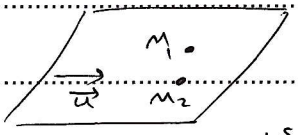
الحل:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1+2 \\ 2-3 & 0+1 & z-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x + 3y + z - 8 = 0$$

الطريقة الرابعة:

معادلة مستوٍ مار من نقطتين معلومتين ويوازي متجه معلوم



نرد هذه الحالة إلى الحالة الثانية على اعتبار أنه يمر بـ M_1 ويوازي المتجهان

$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{u}$

$\vec{u}(p, q, r)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

$$(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{M}\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}) = 0$$

مثال:

أوجد معادلة المستوي المار بـ

$\overrightarrow{M_1}(2, -1, 3)$

$\overrightarrow{M_2}(3, 1, 2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

والموازي للمتجه

$\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

الحل:

$x - y - z = 0$

ـــــــــــ

مسألة خاصة:

معادلة تقاطع المستوي مع المحاور الإحداثية:

إذا كانت $M_1(x_1, 0, 0)$

$M_2(0, y_2, 0)$

$M_3(0, 0, z_3)$

فإن معادلة المستوي المار بالنقط M_1 و M_2 و M_3 تكتب بالشكل

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

بنشر المحدد نحصل على:

$y_2 z_3 x + x_1 z_3 y + x_1 y_2 z - x_1 y_2 z_3$

نقسم على:

$x_1 y_2 z_3 \neq 0$

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} + \frac{z}{z_3} = 1$$

وهي معادلة مستوي بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية

ـــــــــــ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

أوجد معادلة تقاطع المستوي

$2x + 4y + 3z - 12 = 0$

مع المحاور الإحداثية ثم استنتج نقاط التقاطع:

$2x + 4y + 3z = 12$

$\div 12$

$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

نقاط تقاطعه مع المحاور الإحداثية

مع محور ox $(6, 0, 0)$

مع محور oy $(0, 3, 0)$

مع محور oz $(0, 0, 4)$

ملاحظة: اذا كانت $ax + by + cz = 0$ فإن

⇐ مارّ من المبدأ

نتيجة:

الشرط اللازم والكافي لكي تقع النقاط M_1 و M_2 و M_3 و M_4 في مستوٍ واحد هو أن يكون

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال:

بيّن اذا كانت النقاط

$M_1 (-1, 6, 2)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$M_2 (3, 0, 1)$

$M_3 (3, 0, 1)$

$M_4 (1, 2, -3)$

في مستوٍ واحد

الجواب:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

أي واقعة في مستوٍ واحد

الأوضاع الخاصة للمستوي

وهي بالمعادلة المستوي العامة هي

$$Px + qy + rz + d = 0$$

① إذا كان $d = 0$

يحصل على مستوي مار بالمبدأ وهي بالشكل

$$Px + qy + rz = 0$$

② إذا كان $r = 0$ يحصل على معادلة مستوي يوازي oz وهي من الشكل

$$Px + qy + d = 0$$

③ إذا كان $q = 0$ يحصل على معادلة مستوٍ يوازي oy وهي بالشكل

$$Px + rz + d = 0$$

④ إذا كان $p = 0$ يحصل على معادلة مستوٍ يوازي ox وهي بالشكل

$$qy + rz + d = 0$$

⑤ إذا كانت $r = 0$ و $d = 0$ يحصل على مستوٍ يوازي oz ويمر من المبدأ

وهو المستوي oxy

$$Px + qy = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بنفس الطريقة:

نجد أنا $q=0$ و $d=0$ ← المستوي oxz

$$py+rz=0$$

$p=0$ و $d=0$ ← المستوي oyz

$$qy+rz=0$$

6- اذا كان $p=q=0$ نحصل على مستوي يوازي المستوي oxy

$$rz+d=0$$

$$\boxed{z=-\frac{d}{r}}$$

بنفس الطريقة المستوي الموازي لـ oxz يكون $p=r=0$

$$qy+d=0$$

$$\boxed{y=-\frac{d}{q}}$$

" " المستوي الموازي لـ oyz يكون $q=r=0$

$$px+d=0$$

$$\boxed{x=-\frac{d}{p}}$$

7- عندما $x=0$ تمثل معادلة محور oyz

تمثل معادلة محور oxz $y=0$

" " " " oxy $z=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة