كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

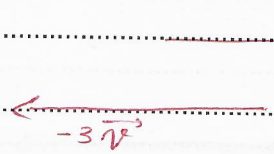
يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

ضرب شعاع بعدد سلمي:

ليكن $\vec{v}$ شعاع ما في الفراغ وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ عدد سلمي عندئذ الشعاع $\alpha\vec{v}$ هو شعاع يوازي $\vec{v}$ وطوليته هي $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$

* إذا كان $\alpha > 0$ كان $\alpha\vec{v}$ له نفس جهة $\vec{v}$

* إذا كان $\alpha < 0$ كان $\alpha\vec{v}$ له عكس اتجاه $\vec{v}$



نتيجة:

شعاعان متجهان إذا وجد عدد $k \in \mathbb{R}$ بحيث $\vec{u} = k\vec{v}$

$\frac{\vec{u}}{\vec{v}} = k$

الجداء السلمي لشعاعين:

الجداء السلمي (الداخلي) لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو مقدار عددي (سلمي) وجهته

تعريف: طولية الأول × طولية الثاني

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$

حيث $\theta = (\vec{u},\vec{v})$

$\vec{u}.\vec{v}$ مقدار سلمي يمكن أن يكون موجباً أو سالباً أو معدوماً

$\cos\theta$ يؤثر بإشارة المقدار $\vec{u}.\vec{v}$ حسب الزاوية θ

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ، عدد صحيح

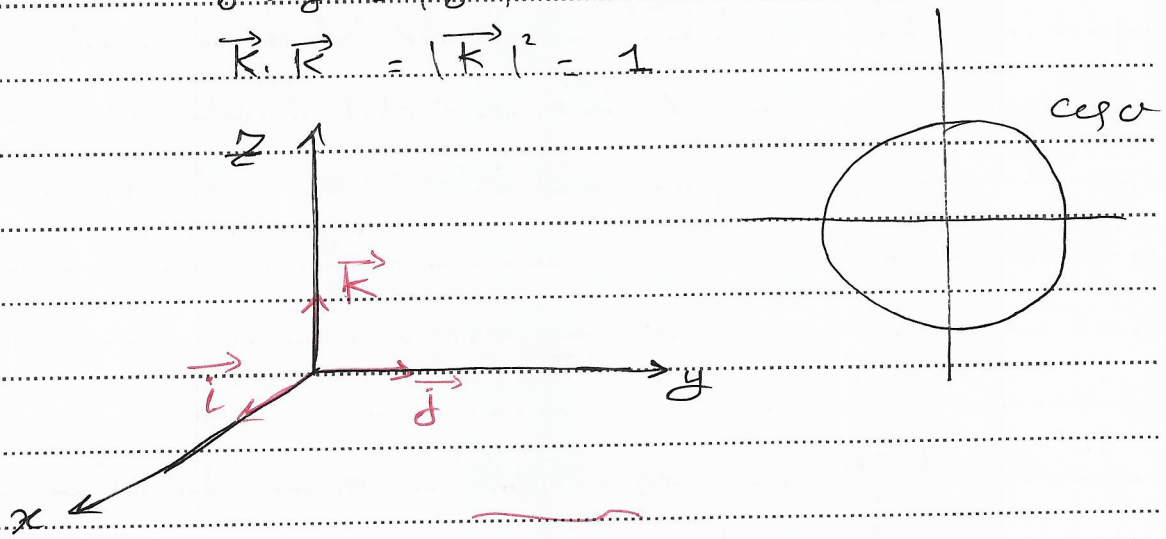
نتيجة: 1- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

2- $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$

$\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$



العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

خواص الجداء السلمي:

1) عملية تبديلية $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2) قابلية توزيع الجداء على الجمع:

$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3) إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha \vec{u})(\beta \vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

4) يمكن حساب التجيب لزاوية θ بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

5- حساب البعد بين نقطتين

$$M_1(x_1,y_1,z_1) \quad , \quad M_2(x_2,y_2,z_2)$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال 1: ليكن النقاط:

$$A(2,1,-1) \quad , \quad B(3,2,-1) \quad , \quad C(3,1,0)$$

أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

الحل:

$$\vec{AB}(1,1,0) \quad , \quad \vec{AC}(1,0,1)$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 1+0+0 = 1$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2+1^2+0} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{1^2+0+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

مثال 2: ليكن النقاط

$$A(3,3,0) \quad , \quad B(2,0,2) \quad , \quad C(1,1,1)$$

أثبت أن المثلث ABC قائم في C

الحل: $(\vec{CA},\vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vec{CA}\cdot\vec{CB} = 0$$

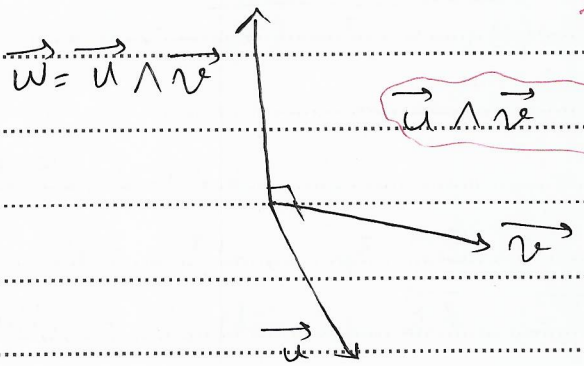
TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الجداء الخارجي لمتجهين (شعاعين):

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين ما في الفراغ نرمز للجداء الشعاعي (الخارجي) للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالرمز $\wedge$ أو $\times$

وهو شعاع عمودي على المستوي المكون من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$



$\vec{w}$ عمودي على المستوي المكون من $\vec{u} \wedge \vec{v}$

طوليته:

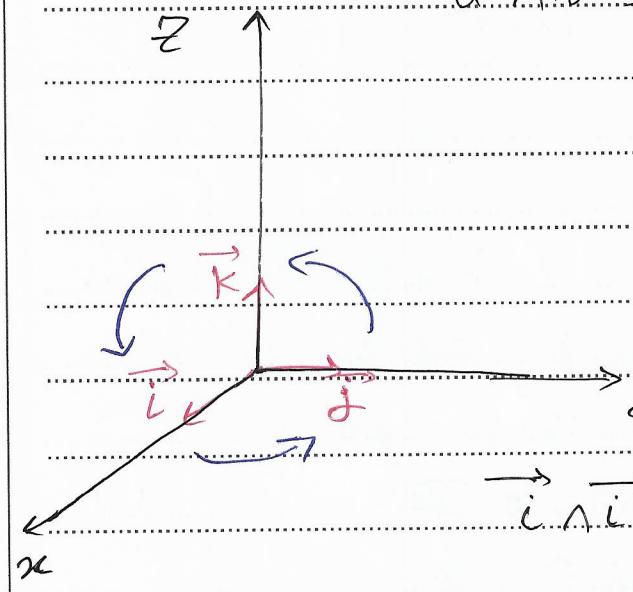
$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$$

حيث $\theta(\vec{u}, \vec{v})$

حالة خاصة:

عندما $\vec{u} \parallel \vec{v}$ يكون $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = 0$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$



نتائج:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$
$$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خواص الجداء الخارجي لشعاعين :

1- $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

2- $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$

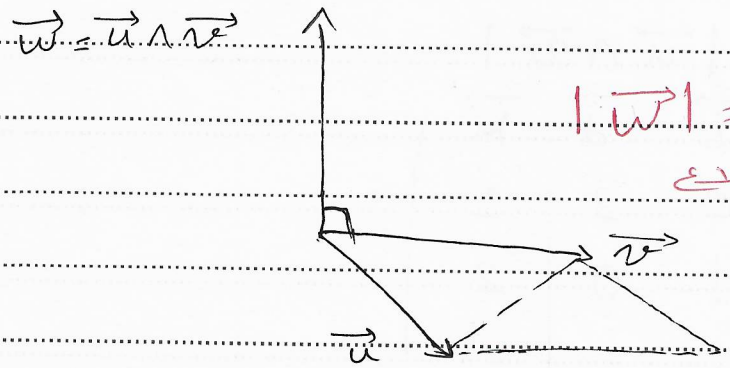
عملية ليست تبديلية

3- قابلية توزيع الجمع على الجداء

$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

4- $|\vec{w}| = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$ وهي تمثل مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{u}$ و $\vec{v}$

أي ضعف مساحة المثلث المنشأ على $\vec{u}$ و $\vec{v}$



$|\vec{w}| = S$ متوازي الأضلاع $= 2S$ المثلث

5- حساب الجداء الشعاعي :

$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ ، $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

نحذف سطر وعمود

محدد صغير

$(-1)^{i+j} \alpha_{ij} A_{ij}$ ← $i+j$ عمود ، سطر ، العنصر

محدد صغير

ذلك المحدد الصغير $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - c \times b$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= (-1)^{1+1}\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3}\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) - \vec{j}(x_1 z_2 - x_2 z_1)$$

$$+ \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

مثال: اوجد مساحة متوازي الاضلاع المبني على

$\vec{u} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$

الحل:

$$S = |\vec{u} \wedge \vec{v}|$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-0)\vec{i} - (0-1)\vec{j} + (0-2)\vec{k}$$

$$= 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{w} = (4, 1, -2)$$

$$|\vec{w}| = S = \sqrt{(4)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

(6) علية الجداء الخارجي لمتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ترتبط مع علية الجداء السلمي بالعلاقة:

$$|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}| = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متطابقة لاغرانج:

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})^2+(\vec{u}.\vec{v})^2=|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2$$

عند $\vec{w}$: $\vec{w}.\vec{w}=|\vec{w}|^2$

البرهان:

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})^2=|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.\sin^2\theta$$

$$(\vec{u}.\vec{v})^2=|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.\cos^2\theta$$

نجمع العلاقتين:

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})^2+(\vec{u}.\vec{v})^2=|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})$$

$$=|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2$$

مثال: أثبت أنه إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهان

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$$

الحل:

$$|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$$

$$\theta=(\vec{u}.\vec{v})$$

$$\vec{v}.\vec{u}=-(\vec{u}.\vec{v})=-\theta$$

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$$

مثال (2):

احسب الجداء الخارجي للشعاعين

(1) $\vec{u}=2\vec{i}$ ، $\vec{v}=2\vec{k}$

(2) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ ، $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$

الحل:

(1) طريقة (1)

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= i(0) - \vec{j}(4) + \vec{k}(0) = -4\vec{j}$

طريقة ②:

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (2\vec{i}) \wedge (2\vec{k}) = 4(\vec{i} \wedge \vec{k}) = -4\vec{j}$

$= -\vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$|\vec{u}|^2 = 4$

$|\vec{v}|^2 = 4$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 0$

$(\vec{u} \wedge \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

$= 4 \cdot 4 - 0 = 16$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \sqrt{16} = 4$

② الجواب $\vec{u} \wedge \vec{v} = -2\vec{k}$

الجداء المختلط لأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة في الفراغ نسمي الثلاثية $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ الجداء المختلط للأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ وبالتالي:

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ عدد = شعاع × شعاع

وهو يمثل حجم متوازي السطوح المنشأ على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

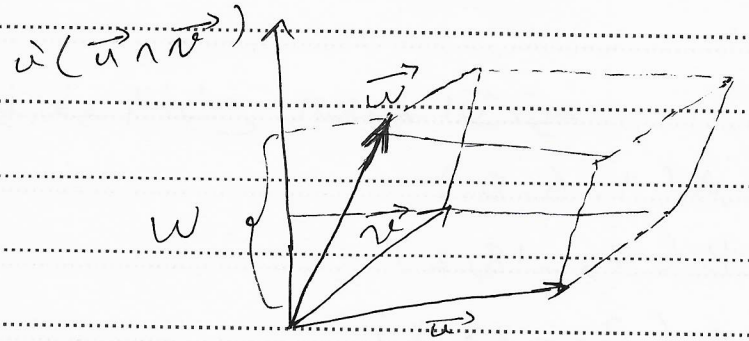
إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير واقعة في مستوى واحد أو غير موازية لمستوى واحد.

إذاً × مضنا أي $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ هو شعاع عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$

وإذا مضنا $\vec{w}$ هو مسقط $\vec{w}$ على $\vec{u} \wedge \vec{v}$ أي $\vec{w'} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

فإن $\vec{w}$ هو ارتفاع متوازي السطوح المنشأ على $\vec{u} \wedge \vec{v}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة



بعض خواص الجداء المختلط:

1- لا تتغير قيمة الجداء اذا اجرينا تبديلاً دورياً لاشعة

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v})$

2- تتعكس اشارة الجداء المختلط إذا بدلنا ترتيب شعاعين فيه

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$

$= -(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$

3- إذا ضرب بأحد المتجهات بعدد فإن قيمة الجداء المختلط تضرب بهذا العدد

$(\alpha\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \alpha(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

4- حالة خاصة:

$(\alpha\vec{u},\beta\vec{v},\gamma\vec{w}) = \alpha\beta\gamma(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

5- إذا كانت الأشعة واقعة في مستوي واحد أو متوازية لمستوي واحد عندئذ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

6- حساب الجداء المختلط

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

ليكن لدينا في الفراغ النقاط الآتية:

A(1, 6, 5)

B(7, -18, 2)

C(3, -2, 4)

D(4, 4, 9)

بين فيما اذا كانت النقاط واقعة في مستوٍ واحد أم لا

الحل: لنشكل 3 أشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}(6, -24, -3)$

$\overrightarrow{AC}(2, -8, -1)$

$\overrightarrow{AD}(3, -2, 4)$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & -24 & -3 \\ 2 & -8 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} -8 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 24\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-34) + 24(11) - 3(-4 + 24)$$

$$= 0$$

النقاط واقعة في مستوٍ واحد.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z