كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تعريف ① أثر وصفوفة مربعة

لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الشكل $n\times n$ نسمي مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة A أثر المصفوفة A ونرمز له بـ $Tr(A)$ ويمكننا التعبير عن ذلك بالشكل:

$$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

مثال: أوجد أثر كل من المصفوفات التالية:

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Tr(A)=3+4=7$$

$$Tr(B)=1+1+1=3$$

$$Tr(C)=-1+1+3+5=8$$

نتائج

لتكن $c\in\mathbb{R}$ ، A ، B مصفوفتان مربعتان ذوات نفس الشكل $n\times n$

① $Tr(c\cdot A)=c\cdot Tr(A)$

② $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$

③ $Tr(A\cdot B)=Tr(B\cdot A)$

④ $Tr(A^T)=Tr(A)$

مثال: لتكن $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ؛ أوجد

① $Tr(5\cdot A)$ ، $5\cdot Tr(A)$ قارن الإجابتين

② $Tr(A+B)$ ، $Tr(A)+Tr(B)$ قارن الإجابتين

③ $Tr(A\cdot B)$ ، $Tr(B\cdot A)$ قارن الإجابتين

④ $Tr(A)$ ، $Tr(A^T)$ قارن الإجابتين

$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

$5 \cdot Tr(A) = 5(3+2) = 5(5) = 25$

$Tr(5A) = Tr\left(\begin{bmatrix}15 & -5\\ 0 & 10\end{bmatrix}\right) = 15+10 = 25$

$5\,Tr(A) = Tr(5A)$

$Tr(A) + Tr(B) = 5 + (-1) = +4$

$A \cdot B = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3+4 & 6-0\\ 0+8 & 0+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & 6\\ 8 & 0\end{bmatrix}$

$Tr(A \cdot B) = -7+0 = -7$

$B \cdot A = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3+0 & 1+4\\ 12+0 & -4+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 5\\ 12 & -4\end{bmatrix}$

$Tr(B \cdot A) = -3-4 = -7$

$Tr(A \cdot B) = Tr(BA)$

$Tr(A) = 3+2 = 5$, $Tr(A^T) = Tr\left(\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\right) = 3+2 = 5$

$Tr(A) = Tr(A^T)$

خواص العمليات على المصفوفات

1 خواص عملية الجمع

① الجمع عملية تبادلية أي

② الجمع عملية تجميعية أي

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

GLORY Notebooks

③ بفرض $A_{m\times n}$ توجد مصفوفة وحيدة O_{mn} تحقق:

$$O + A = A + O = A$$

تدعى المصفوفة الصفرية من الشكل $m\times n$.

④ من أجل كل مصفوفة $A_{m\times n}$ توجد مصفوفة وحيدة D تحقق:

$$A + D = O$$

سنعبر عن D بالرمز $(-A)$ وندعوها نظيرة A

مثال: ليكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ فإن:

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

A نظير

$$(-A) = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

بأن:

$$A + (-A) = O_{2\times 3}$$

خواص عملية الجداء

① جداء المصفوفات عملية تجميعية أي أن:

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

② ضرب المصفوفات توزيعي على الجمع من اليسار ومن اليمين أي:

$$C.(A+B) = C.A + CB$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

يمكن التحقق بأمثلة

ملاحظة: جداء مصفوفتين ليست عملية تبديلية أي:

$A.B \neq B.A$

وقد لا تكون $B.A$ ممكنة أصلاً

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix} 0+3+15 & 0+12+5 \\ 4-1+3 & 10-4+1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$=\begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

أما

$$B.A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 15 \\ 2 & -1 & 9 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

من الواضح أن $A.B \neq B.A$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A.B$ ممكنة أما $B.A$ غير ممكنة

٣ خواص ضرب مصفوفة بعدد حقيقي

ليكن A, B مصفوفتان من الشكل $m \times n$ و $r, s \in \mathbb{R}$

عندئذٍ:

(1) $r(s.A) = (r.s).A$

(2) $(r+s)A = rA + sA$

(3) $r(A+B) = r.A + r.B$

(4) $A.(r.B) = r.(A.B) = (rA).B$

(يمكن التحقق بأمثلة)

٤ خواص منقول مصفوفة:

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

مثال: ليكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

تحقق أن: (1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = B^T . A^T$

الحل: (1)

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A$$

(2)

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

العبارة محققة

GLORY Notebooks

ملاحظة: من المعروف انه اذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ وكان $a.b=0$ فإما $a=0$ أو $b=0$

لكن هذا غير صحيح في المصفوفات

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مع أن $B \neq 0, \ A \neq 0$

ملاحظة: من الممكن أن يكون $A.B=A.C$ بحيث $B \neq C$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A.B=AC=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

GLORY Notebooks

نماذج خاصة من المصفوفات

١- المصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها خارج القطر الرئيسي أصفار

أي: $a_{ij}=0 \quad \forall i \neq j$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

٢- المصفوفة الواحدية من الشكل $n\times n$:

هي مصفوفة جميع عناصر قطرها الرئيسي $=1$ و الباقي 0

أي تحقق $\begin{cases} a_{ij}=0 & \forall i \neq j \\ a_{ij}=1 & \forall i=j \end{cases}$

ويرمز لها بـ I_n

مثلاً:

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٣- المثلثية العليا:

نقول عن المصفوفة $A_{n\times n}$ أنها مثلثية عليا إذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي أصفاراً

[ونكتب $a_{ij}=0 \quad \forall i>j$]

مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ مثلثية عليا}$$

٤- المثلثية السفلى:

نقول عن المصفوفة $A_{n\times n}$ أنها مثلثية سفلى إذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق قطرها الرئيسي أصفاراً

ونكتب $a_{ij}=0 \quad \forall j>i$

مثال

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

GLOR Notebooks

٥. المصفوفة المتناظرة:

نقول عن المصفوفة المربعة $A_{n\times n}$ أنها متناظرة اذا وفقط اذا تحقق: $A^T = A$ وبكلام آخر:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ متناظرة لأن:

$$A^T = A$$

٦. المصفوفة المتناظرة عكسياً

نقول أن المصفوفة المربعة $A_{n\times n}$ أنها متناظرة عكسياً اذا وفقط اذا تحقق: $A^T = -A$

مثال: $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

$$-B^T = B$$

$\Leftarrow$ B متناظرة عكسياً

نتيجة: كل مصفوفة متناظرة عكسياً تكون جميع عناصر قطرها الرئيسي أصفاراً.

٧. المصفوفة العمودية:

نقول عن المصفوفة المربعة $A_{n\times n}$ أنها عمودية اذا كان: $A.A^T = I_n$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ عمودية لأن $A.A^T = I_3$ (تحقق من ذلك)

GLORY Notebooks

مكتبة A to Z