كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : الاولى/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

أوجد نهاية كل من التوابع الآتية

1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\le 1 \\ x+1 & : x>1 \end{cases}$ $x\to 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2)=(1)^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

لنهاية للدالة f غير موجودة عند $x=1$

2. $f(x)=\dfrac{\sin(2x)-\cos(2x)-1}{\sin x-\cos x}$ $x\to \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} f(x)$ عند التعويض نجد حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

نحاول إزالة حالة عدم التعيين.

$$f(x)=\frac{2\sin x\cdot\cos x-(2\cos^2 x-1)-1}{\sin x-\cos x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x}{\sin x-\cos x}$$

$$=\frac{2\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=2\cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(2\cos x)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\le 2 \\ x+2 & : x>2 \end{cases}$ $x\to 2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2)=4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

4. $f(x)=(x-\frac{\pi}{2})\tan x$ $x\to\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ عند التعويض نجد الشكل $(0)(\infty)$ نحاول إزالة حالة عدم التعيين نفرض $x-\frac{\pi}{2}=t$ ومنه عندما $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $t\to 0$ ويكون $x=t+\frac{\pi}{2}$

$$f(t)=t\cdot\tan(t+\tfrac{\pi}{2})$$

$$=-t\cdot\cot g(t)=-t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{t}{\sin t}\cos t$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 0}\left[-\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right]=-(1)(1)=-1$$

④ نظرية أوبتال

$$f(x) = \frac{\sin(2x) - \cos(2x) - 1}{\sin x - \cos x} \qquad x \to \frac{\pi}{4}$$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$ عند تعيين قيمة $\frac{0}{0}$ حالة

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin(2x) - \cos(2x) - 1)'}{(\sin x - \cos x)'}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(2x) + 2\sin(2x)}{\cos x + \sin x} = \frac{0 + 2}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

---

⑤ $$f(x) = \frac{1 - \cos x}{tg\, x} \qquad x \to 0$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عند تعيين قيمة النهاية لستخدم قاعدة أوبتال

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(tg\, x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + tg\, x}$$

$$= \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

نتأمل الدالة المعرفة بالشكل

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & : x > 2 \\ bx^3 + b & : 1 \le x \le 2 \\ x & : x < 1 \end{cases}$$

عين الثابتين a و b ليكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 + a$ دالة مستمرة على $]2, +\infty[$

$x \longmapsto bx^3 + b$ دالة مستمرة على $]1, 2[$

$x \longmapsto x$ دالة مستمرة على $]-\infty, 1[$

يقتضي أن تكون الدالة f مستمرة عند $x=1$ ، عند $x=2$ لتكون مستمرة على $\mathbb{R}$

الاستمرار عند $x=1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = b(1) + b = 2b$$

شرط الاستمرار $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$$2b = 1 \hookrightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

مستمرة عند $x=2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = b(2^3) + b = 8b + b = 9b = \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 + a = a + 4$$

شرط الاستمرار $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

$$a + 4 = \frac{9}{2}$$

$$a = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2} & : x > 2 \\ \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} & : 1 \le x \le 2 \\ x & : x < 1 \end{cases}$$

ادرس استمرار الدالة على مجموعة تعريفها

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x+1 & x \geq 2 \end{cases}$$

هل يوجد نقط انقطاع حدد نوعها إن حال وجودها

$x \longmapsto x^2$ دالة مستمرة على المجال $]-\infty, 2[$

$x \longmapsto x+1$ دالة مستمرة على المجال $]2, +\infty[$

لندرس استمرار الدالة عند $x=2$ من اليسار

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = (2)^2 = 4$$

$$f(2) = 2+1 = 3$$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$ فالدالة غير مستمرة عند $x=2$ من اليسار

لندرس استمرار الدالة عند $x=2$ من اليمين

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2+1 = 3 = f(2)$$

f دالة مستمرة عند $x=2$ من اليمين فقط

f دالة غير مستمرة عند $x=2$ و $x=2$ نقطة انقطاع من النوع الأول لا يمكن إزالتها

ادرس استمرار الدالة $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ عند الصفر

في حال كانت غير معرفة عندئذ نعرف f كي تصبح مستمرة عند $x=0$

الدالة غير مستمرة عند $x=0$ لأنها غير معرفة عند $x=0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{\cos(0)} (1) = (1)(1) = 1$$

نعرف f بالشكل:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ دالة مستمرة عند $x=0$

مكتبة A to Z