كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

مقدمة في التحليل الرياضي

الدالة:

هي علاقة f تربط كل عنصر x من مجموعة A (غير خالية) تدعى منطلق الدالة بعنصر واحد فقط y من مجموعة B (غير خالية) تدعى مستقر الدالة و نكتب:

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

ندعو المجموعة $f(A) = \{y \in B: y = f(x); x \in A\}$ المستقر الفعلي للدالة f أو مدى الدالة f و نرمز لها $Im(f)$. فإذا كانت A, B مجموعتين عدديتين فإننا ندعو هذه الدالة دالة عددية.

تصنيف الدوال:

1. **الدالة المتباينة:** هي دالة يكون كل عنصر من مستقرها صورة لعنصر واحد على الأكثر من المنطلق، فإذا كان x_1, x_2 عنصرين من منطلق الدالة f و كان $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $x_1 = x_2$ و هذا يكافئ القول أنه إذا كان $x_1 \neq x_2$ فإن $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. **الدالة الغامرة:** هي دالة يكون فيها كل عنصر من مستقرها صورة لعنصر واحد على الأقل من المنطلق، أي إذا كانت $f: A \to B$ دالة غامرة فإن:
$\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)$ (أياً كان y من المستقر يوجد على الأقل العنصر x بحيث أن y هو صورة x وفق الدالة f.
3. **دالة التقابل:** هي دالة متباينة و غامرة معاً و يكون فيها كل عنصر من مستقرها صورة لعنصر واحد فقط من المنطلق.

تمرين: صنف كل من الدوال الآتية:

$$1. f(x) = 2x \qquad 2. g(x) = x^2 \qquad 3. h(x) = x^3$$

4. **الدالة الزوجية:** يقال إن الدالة $f: A \to B$ دالة زوجية إذا و فقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:
a. مهما يكن $x \in A$ فإن $-x \in A$
b. مهما يكن $x \in A$ فإن $f(x) = f(-x)$.

5. **الدالة الفردية:** يقال إن الدالة $f: A \to B$ دالة فردية إذا و فقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

a. مهما يكن $x \in A$ فإن $-x \in A$

b. مهما يكن $x \in A$ فإن $f(-x) = -f(x)$.

6. **الدالة الدورية:** يقال إن الدالة $f: A \to B$ دالة دورية إذا وجد عدد $T \in \mathbb{R}$ بحيث تتحقق المساواة $f(x+T) = f(x)$ لأجل جميع قيم $\in A$.

ندعو أصغر عدد موجب T يحقق المساواة السابقة بدور الدالة f.

مثلاً الدالة: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة وفق: $f(x) = \cos x$ هي دالة دورية و دورها $T = 2\pi$

لأنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.

7. **الدالة العكسية:** إذا كانت الدالة $f: A \to B$ دالة تقابل، فإنه لكل عنصر y من B يوجد عنصر وحيد x من A بحيث أن $y = f(x)$.

و بالتالي يمكننا تعريف دالة جديدة $g: B \to A$ بحيث تكون صورة كل عنصر y من B هي العنصر x من A بحيث يحقق $x = g(y)$.

نرمز للدالة العكسية للدالة f بالرمز f^{-1} عوضاً عن g و نكتب:

$$f^{-1}: B \to A$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = x$$

و بالرموز المألوفة نكتب: $f^{-1}: B \to A$

$$f^{-1}(x) = y \quad : x \in B$$

تمرين: برهن أن الدالة $f: \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق $f(x) = \frac{3x-5}{x+2}$، تقابل ثم أوجد الدالة العكسية لها.

لنبرهن أنها تقابل سنبرهن أنه مهما يكن $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ فهو صورة لعنصر وحيد من $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$$\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}: y = \frac{3x-5}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) = 3x-5$$
$$\Leftrightarrow yx + 2y = 3x - 5 \Leftrightarrow yx - 3x = -2y - 5$$
$$\Leftrightarrow x(y-3) = -(2y+5)$$

و منه: $x = \frac{2y+5}{3-y} \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

نلاحظ أن العنصر x موجود و هو وحيد فالدالة هي دالة تقابل و تقابلها العكسي هو:

$$f^{-1}: \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{-2\}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{3-x}$$

نورد فيما يلي الدوال المثلثية الشهيرة و الدوال العكسية لها

1. دالة الجيب المثلثية:

$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة دورية دورها $T = 2\pi$ بالتالي ليست متباينة و هي ليست غامرة لأنه مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $-1 \le \sin x \le 1$ ، لكن إذا اقتصر تطبيق هذه الدالة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن الدالة الناتجة: $\sin: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[$ تصبح دالة تقابل و لها تقابل عكسي نرمز له $arc\sin:]-1,1[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

فإذا كان $arc\sin a = b$ فإن $\sin b = a$

2. دالة التجيب (جيب التمام) المثلثية:

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة دورية دورها $T = 2\pi$ بالتالي ليست متباينة و هي ليست غامرة لأنه مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $-1 \le \cos x \le 1$ ، لكن إذا اقتصر تطبيق هذه الدالة على المجال $]0, \pi[$ فإن الدالة الناتجة: $\cos:]0, \pi[\to]-1,1[$ تصبح دالة تقابل و لها تقابل عكسي نرمز له $arc\cos:]-1,1[\to]0, \pi[$

فإذا كان $arc\cos a = b$ فإن $\cos b = a$

3. دالة الظل المثلثي:

$tg: \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\} \to \mathbb{R}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هذه الدالة غامرة لأن المستقر الفعلي لها هو $\mathbb{R}$ لكنها ليست متباينة فهي دورية و دورها $T = \pi$

لكن إذا اقتصرت دراستنا على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ فإن الدالة الناتجة: $\mathrm{tg}: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ هي دالة تقابل و لها تقابل عكسي نرمز له $\mathrm{arctg}: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

4. دالة التظل المثلثي:

$ctg: \mathbb{R}\backslash\{\pi k\} \to \mathbb{R}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هذه الدالة غامرة لأن المستقر الفعلي لها هو $\mathbb{R}$ لكنها ليست متباينة لأنها دورية و دورها $T = \pi$ لكن إذا اقتصرت دراستنا على المجال $]0, \pi[$ فإن الدالة الناتجة: $\mathrm{ctg}:]0, \pi[\to \mathbb{R}$ هي دالة تقابل و لها تقابل عكسي نرمز له $\mathrm{arcctg}: \mathbb{R} \to]0, \pi[$

نهاية دالة:

نقول عن الدالة $f: X \to Y$ حيث $X, Y \subseteq \mathbb{R}$، إنها تسعى إلى عدد $b \in \mathbb{R}$ عندما تسعى x نحو a إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \forall x \in X; x \ne a$$

و نكتب: $\lim_{x \to a} f(x) = b$

ملاحظة:

إذا وجدت نهاية l_1 للدالة $f(x)$ عندما تسعى x نحو a و هي أصغر تماماً من a فإننا نحصل على تعريف النهاية لهذه الدالة من اليسار في النقطة a و نكتب: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l_1$.

و إذا وجدت نهاية l_2 للدالة $f(x)$ عندما تسعى x نحو a و هي أكبر تماماً من a فإننا نحصل على تعريف النهاية لهذه الدالة من اليمين في النقطة a و نكتب: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l_2$.

فإذا كانت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ قلنا أن للدالة نهاية عند $x = a$ و نكتب:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

و في حال $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ قلنا أن الدالة لا تملك نهاية عند $x = a$.

تمرين: ابحث في وجود نهاية لكل من الدوال الآتية:

1. $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : a = 0$

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

2. $f: \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R} : a = 1$

$$f(x) = e^{\frac{3}{x-1}}$$

الحل:

.1

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1\ ;\ |x| = -x : x < 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1\ ;\ |x| = x : x > 0$$

بما أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ليس للدالة $f(x)$ نهاية عند الصفر.

.2

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{3}{x-1}\right) = -\infty \implies \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3}{x-1}\right) = +\infty \implies \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

بما أن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ليس للدالة $f(x)$ نهاية عند $x = 1$.

ملاحظة: عند إيجاد نهاية دالة ما $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ عندما تسعى x نحو a، إذا نتج لدينا حالة عدم تعيين من الشكل: $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ فإننا نستخدم قاعدة أوبيتال لإزالة عد التعيين و هي تنص على:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{h'(x)}{g'(x)}\right)$$

مثال: أوجد النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

نطبق قاعدة أوبيتال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

استمرار الدوال:

تعريف: لتكن $B, D_f = A \subseteq \mathbb{R}$ ، يقال إن الدالة $f: A \to B$ دالة مستمرة في النقطة a من مجموعة تعريفها إذا و فقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \delta > 0: |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

فإذا كانت الدالة f معرفة عند النقطة a و في جوارها فإن f مستمرة في النقطة a إذا و فقط إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

أما إذا وجد جوار I للنقطة a لا يحوي من مجموعة تعريف الدالة f إلا النقطة a أي: $I \cap D_f = \{a\}$ قلنا إن النقطة a نقطة منعزلة في D_f و نقبل أن الدالة f مستمرة عندها.

مثال:

الدالة $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ غير مستمرة عند الصفر لأنها غير معرفة عندها.

بينما الدالة $\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & : x\neq 0\\ 1 : x=0\end{cases}$ هي دالة مستمرة عند الصفر لأن :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1=f(0)$$

نسمي $\tilde{f}$ تمديد للدالة f.

تعريف: إذا كانت الدالة $y=f(x)$ مستمرة في كل نقطة من المجال $]a,b[$ و معرفة عند كل من b و a و تحقق: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

فإن الدالة $f(x)$ مستمرة عند كل من b و a و تصبح عندئذٍ مستمرة على كامل نقاط المجال $[a,b]$.

انقطاع دالة:

يقال إن الدالة $f: A \to \mathbb{R}$ دالة غير مستمرة في النقطة a في كل من الحالات الآتية:

1. $a \notin A$

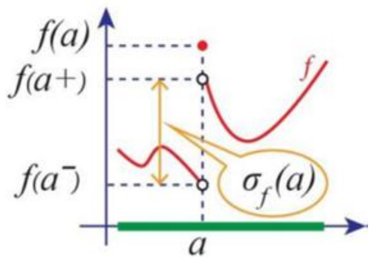
2. $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$

3. إحدى النهايتين على الأقل $\lim_{x \to a^-} f(x)$ أو $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ليست موجودة أو غير منتهية.

4. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

* نسمي $x = a$ نقطة انقطاع من النوع الأول إذا كان $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ حيث كل منهما نهاية منتهية أي:

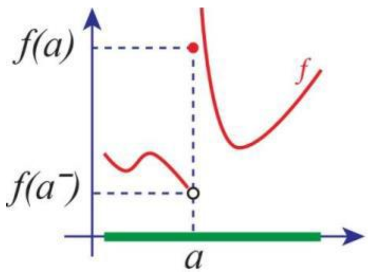
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) \in \mathbb{R} \text{ و } \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) \in \mathbb{R}$$



و نسمي $f(a^+) - f(a^-) = \sigma_f(a)$ قفزة f عند a.

* نسمي $x = a$ نقطة انقطاع من النوع الثاني إذا لم يكن مستمراً عند a و لم يكن له انقطاع من النوع الأول

مثال:



ملاحظة: إذا كانت a تحقق 1 $(a \notin A)$ أو 4 $(\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a))$ قلنا إن نقطة a انقطاع قابلة للإزالة

تمرين: بين أن $x = 2$ نقطة انقطاع للدالة:

$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 2 \\ 4 & ; x = 2 \\ x + 1 & ; x > 2 \end{cases}$ بين نوعها و هل يمكن إزالتها؟

الحل:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3 \text{ و } \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

نستنتج أن $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ فالنهاية غير موجودة و بالتالي الدالة غير مستمرة عند $x = 2$ و هي نقطة انقطاع من النوع الأول لا يمكن إزالتها.

تمرين: بين أن $x = 1$ نقطة انقطاع للدالة:

$f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; x \neq 1 \\ 3 & ; x = 1 \end{cases}$ بين نوعها و هل يمكن إزالتها؟

الحل:

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$ و لدينا $f(1) = 3$ بالتالي $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

فالدالة غير مستمرة عند $x = 1$ و هي نقطة انقطاع من النوع الثاني قابلة للإزالة بإسناد القيمة 2 لصورة 1 بالشكل الآتي: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; x \neq 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$

تمرين: بين لماذا تكون الدالة $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$ غير مستمرة عند الصفر، ثم مدد f بحيث نحصل على دالة مستمرة عند $x = 0$.

الحل:

الدالة $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$ المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ غير مستمرة عند الصفر لأنها غير معرفة عندها، و بالتالي $x = 0$ نقطة انقطاع من النوع الثاني قابلة للإزالة :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{2x}\right) = \frac{1}{2}$$

بوضع $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & : x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$ نجد أنها دالة مستمرة عند الصفر لأن :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{2x}\right) = \frac{1}{2} = f(0)$$