كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة١

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

منقول مصفوفة:

لتكن $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة لها n سطر و m عمود تسمى A^T.

منقول المصفوفة: هي ناتجة عن استبدال الأسطر بالأعمدة أو الأعمدة بالأسطر وبالتالي.

$$A^T=[a_{ij}]_{n\times m}$$

سطر ← عمود

$$A=\begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \cdots & a_{1.m} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \cdots & a_{2.m} \\ a_{n.1} & a_{n.2} & a_{n.3} & \cdots & a_{n.m} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & \cdots & a_{n.1} \\ a_{1.2} & a_{2.2} & & a_{n.2} \\ a_{1.3} & a_{2.3} & & a_{n.3} \\ a_{1.m} & a_{2.m} & & a_{n.m} \end{bmatrix}$$

لدينا كل سطر من المصفوفة A وصلنا عمود في المصفوفة A^T

مثال

$$A_{2\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T_{4\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

تحقق ينقول المصفوفة الخواص الآتية:

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad [1]$$

$$(A^T)^T = A \quad [2]$$

$$(A.B)^T = A^T . B^T \quad [3]$$

المحددات (determinate):

ملاحظة: لا يمكن حساب المحددة إلا المصفوفة مربعة.

يرمز لمحدد المصفوفة المربعة من الرتبة $n \times n$ بالرمز $(\det A)$ أو (ΔA)

من أجل المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & \cdots & a_{1.m} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & \cdots & a_{2.m} \\ a_{m.1} & a_{m.2} & a_{m.3} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \det A = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.m} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.m} \\ a_{m.1} & a_{m.2} & a_{m.3} & a_{m.m} \end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة حساب المحدد لمصفوفة من الرتبة الثانية (أو مقياس مصفوفة من الرتبة الثانية).

حساب عناصر القطر الرئيسي - حساب عناصر قطر ثانوي

$$A=\begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{1.1} \times a_{2.1} - a_{1.2} \times a_{22}$$

ملاحظة: المحدد موجود وليس مصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = 4 - 6 = -2$$

- طريقة حساب مصفوفة من الرتبة الثالثة:

لحساب مصفوفة من الرتبة الثالثة يوجد أكثر من طريقة:

$$A=\begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

- الطريقة الأولى: النشر حسب أحد الأسطر أو أحد الأعمدة:

$$= (-1)^{i+j} (a_{i.j}) . A_{ij}$$

حيث: i: تدل على السطر الموجود بالعنصر.

j: تدل على العمود الموجود بالعنصر.

A_{ij}: هو محدد صغير وينتج من المحدد Δ بعد حذف سطر وعمود العنصر a_{ij}.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

نقدم طريقة البشر صب الطرف الأول

$$= (-1)^{(i+j)} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{1.1} \cdot A_{ij}$$

$$= (-1)^{2} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 10 - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$$

الطريقة الثانية: سارروس

خطوات الطريقة: نضيف عناصر العمود الأول والثاني إلى عناصر الحد إلى جانب العمود الثالث وطبعة مجموع جداءات عناصر الأقطار الرئيسية وطرحاً منه مجموع جداءات عناصر الأقطار الثانوية.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.1} & a_{2.2} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} & a_{3.1} & a_{3.2} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1.1} \cdot a_{2.2} \cdot a_{3.3} + a_{1.2} \cdot a_{2.3} \cdot a_{3.1} + a_{1.3} \cdot a_{2.1} \cdot a_{3.2} +$$

$$a_{1.2} \cdot a_{2.1} \cdot a_{3.3} - a_{1.1} \cdot a_{2.3} \cdot a_{3.2} - a_{1.3} \cdot a_{2.2} \cdot a_{3.1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$D=\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.m} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.m} \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.m} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{نفرض اخترنا سطر أول} \Rightarrow \alpha D = \begin{vmatrix} \alpha_{1.1} & \alpha_{1.2} & \cdots & \alpha a_{1.m} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & \cdots & a_{2.m} \\ a_{m.1} & a_{m.2} & \cdots & a_{m.m} \end{vmatrix}$$

الطريقة الثالثة: لحساب محدد من مرتبة ثالثة:

بالاعتماد على خواص المحددات نحول السطر الأول أو أي سطر (أو عمود أول أو أي عمود) إلى الصفر ما عدا عنصر واحد في هذا السطر أو العمود، ثم ننشر هذا السطر أو العمود

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$-3L_1+L_2 \longrightarrow L_2$

نضرب السطر الأول بـ 3- ونجمعه مع سطر ثاني

ونضع الجواب بالسطر الثاني

$L_1+L_3 \longrightarrow L_3$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-4-3) = -7$$

ملاحظة هامة: إذا كانت الصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى عندئذ D هو جداء عناصر القطر الرئيسي.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لأجل المثال السابق لدينا:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad 3L_2 + L_3 \to L_3$$

$$\Rightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ مثلثية سفلى

$$\Rightarrow \Delta = (1)(-1)(7) = -7$$

أثبت بطريقة سارروس صحة العلاقة الآتية:

$$det(A.B) = det(A).det(B)$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 1+0+0-0-0-6 = -5$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} = 1+0+0-4-4-0 = -7$$

$$det(A.B) = det(A).det(B)$$

$$det(A.B) = 35$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1.1+0.2+3.0 & 1.2+0.1+3.2 & 1.0+0.2+3.1 \\ 0.1+1.2+0.0 & 0.2+1.1+0.2 & 0.0+1.2+0.1 \\ 2.1+0.2+1.0 & 2.2+0.1+1.2 & 2.0+0.2+1.1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A.B \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 32 + 36 - 16 - 12 - 6$$

$$= 69 - 34 = +35$$

محقق

طريقة حساب المرتبة الرابعة:

من قانون الطريقة العامة (الأولى) في حساب محدد مرتبة ثالثة (بشرط سطر أو عمود) أوجد مواضع المحددات.

الهدف: تخفيض مرتبة المصفوفة من الرابعة إلى الثالثة.

1 هي محدد المصفوفة.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2L_1 - L_2 \to L_2$$

$$-3L_1 + L_3 \to L_3$$

$$-4L_1 + L_4 \to L_4$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

من خواص المحددات نشر حسب العمود الأول:

$$= (-1)^{1+1}(1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$-L_1 + L_2 \to L_2$

$-2L_1 + L_3 \to L_3$

وهومن الحتبة الثالثة ← (سارروس أو نشر حسب الطرأ العمود)

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -12 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2}(1) \cdot (40 - 24)$$

$$= -16$$

ملاحظة

من خواص المحددات النشر حسب العمود الأول أو أي عمود

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} 0 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

ق.ا

ل.ن.A.(1).$(-1)^{3}$ = القانون ←

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مقلوب المصفوفة:

لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n إذا كان $\det A \neq 0$ يوجد لمقلوب A يرمز A^{-1} ويحقق: $A \cdot A^{-1} = E$

E هي مصفوفة واحدية.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة نظامية: $\det A \neq 0$

شاذة: $\det A = 0$

نظرية: لكل مصفوفة مربعة مقلوب إذا كان $\det A \neq 0$

خطوات إيجاد مقلوب مصفوفة:

1) نوجد المحدد $\det A$ ونتأكد أن $\det A \neq 0$

2) إذا كان $\det A \neq 0$ ⇐ نتبع ما يلي:

a) نوجد مصفوفة الحدية $\tilde{A}$ أو المصفوفة المساعدة

b) نوجد منقول $\tilde{A}$ أي $(\tilde{A})^T$

c) نضرب منقول $(\tilde{A})^T$ بـ $\frac{1}{\det(A)}$ ⇐ $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(\tilde{A})^T$

* نتيجة: مقلوب المصفوفة إذا وجد فهو وحيد.

البرهان: نفرض العكس

أنه يوجد مقلوب ثاني لـ A وهو B

نضرب الطرفين بـ A^{-1}.

$$A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot E$$

$$E \cdot B = A^{-1} \cdot E$$

$$A^{-1} = B \Rightarrow$$ المقلوب وحيد

$$\left.\begin{matrix} A \cdot B = E \\ B \cdot A = E \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: احسب قيمة المحدد:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ 5 & 1\end{matrix}$$

$$=(1)(1)(2)+(0)(2)(5)+(2)(3)(1)-(0)(3)(2)-(1)(2)(1)-(2)(1)(5)$$

$$=-4$$

خواص المحددات:

1" $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

2" $\det(A.B)=\det(A).\det(B)$

3" $\det(A)^T=\det A$

4" اذا كان أحد الأسطر أو الأعمدة صفرياً تكون قيمة المحدد معدومة $\Delta=0$

5" لتغيير قيمة المحدد اذا جمعنا عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة إلى عناصر سطر أو عمود آخر

6" إذا تساوى عناصر سطرين أو عمودين فإن $\Delta=0$

7" لتغيير قيمة المحدد إذا أضفنا أو طرحنا من عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة مضاعف عناصر سطر آخر أو عمود آخر.

8" إذا ضربت عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة بـ λ فإن قيمة المحدد تضرب بـ λ

مثال: أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -4 & -5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -4 & -5\\ 3 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$D = |A| = 1 \neq 0$ بالتالي

مصفوفة نظامية يكون لها مقلوب

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{1.1} & A_{1.2} & A_{1.3} \\ A_{2.1} & A_{2.2} & A_{2.3} \\ A_{3.1} & A_{3.2} & A_{3.3} \end{bmatrix}$$

$A_{1.1} = (-1)^{1+1} \cdot a_{1.1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1.1 \cdot (-24+25) = 1$

$A_{2.2} = (-1)^{2+2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -4 \cdot (6-9) = 12$

$A_{1.2} = (-1)^{3} \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -2(-12+15) = -6$

خواص معكوس المصفوفة:

1) $\det(A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

وظيفة.

حالة خاصة: مقلوب مصفوفة من الرتبة الثانية

$$A = \begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_{2.2} & a_{1.2} \\ a_{2.1} & a_{1.1} \end{bmatrix}$$

نعكس العناصر على قطر ثانوي ونبدل عناصر قطر رئيسي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: اوجد معكوس A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$

صفوفة نظامية

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وظيفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z