كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : ميكانيك الكم٢

المحاضرة : ٥+٦ /نظري/

المحاضرة 5و6 لمقرر ميكانيك الكم (2) لطلاب السنة الرابعة فيزياء – د. سمر عمران

نظرية التبعثر (الكلاسيكي والكمي)

مقدمة عن التصادم: لنتصور تصادماً كلاسيكياً يصدم فيه الجسيم A الجسيم B، وينتج عن ذلك الجسيمين C وD، كما يوضح الشكل التالي:

قبل التصادم $A + B \rightarrow C + D$

هناك أنواع للتصادم: التصادم الكلاسيكي: في هذا النوع من التصادم لدينا ثلاثة حالات، وهي:

1– انحفاظ الكتلة: $m_A + m_B = m_C + m_D$

2– انحفاظ العزم الخطي أو انحفاظ الاندفاع: $\vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{P}_C + \vec{P}_D$

3– الطاقة الحركية يمكن أن تكون محفوظة أو لا تكون.

وهنا لدينا ثلاثة أنواع:

1– التصادم اللين (sticky): الطاقة الحركية تتناقص، والشكل العام هو:

$$A + B \rightarrow G$$

$$T_A + T_B > T_C + T_D$$

2– تفكك أو تحلّل (Explosive): الطاقة الحركية تتزايد، والشكل العام هو:

$$G \rightarrow A + B$$

$$T_A + T_B < T_C + T_D$$

3– التصادم المرن (Elastic): الطاقة الحركية مصانة، والشكل العام هو:

$$A + B \rightarrow C + D$$

$$T_A + T_B = T_C + T_D$$

التصادم النسبي: غير الكلاسيكي: لدينا ثلاثة أنواع منه:

1– الطاقة مصونة: $E_A + E_B = E_C + E_D$

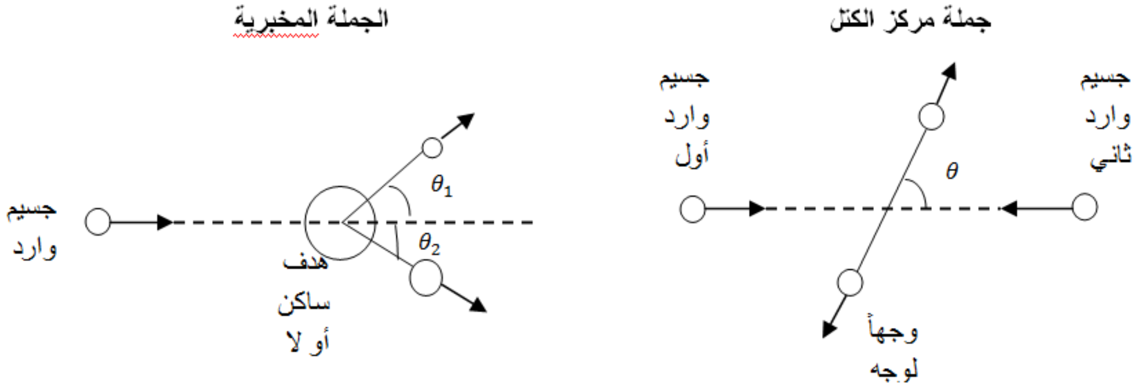
2– العزم الخطي (الاندفاع) مصون: $\vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{P}_C + \vec{P}_D$

في فراغ الزمكان: $P_A^\mu + P_B^\mu = P_C^\mu + P_D^\mu$

$$P^\mu = (E, \vec{P})$$

3- الطاقة الحركية تكون مصونة أولاً:

- لين: الطاقة الحركية تتناقص، وتزداد الطاقة الساكنة والكتلة.
- تحلّل: الطاقة الحركية تتزايد، وتتناقص الطاقة الساكنة والكتلة.
- مرن: الطاقة الحركية والطاقة الساكنة والكتلة محفوظة.



تطبيق: يتفكك بيون π^- وهو في حالة السكون إلى ميون μ^- ونترينو ν، والمطلوب: ماهي سرعة الميون السالب μ^- ؟

الحل: لدينا $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu$

حسب قانون انحفاظ الطاقة نكتب: $E_\pi = E_\mu + E_\nu$

حسب قانون انحفاظ الاندفاع نكتب:

$$\vec{P}_\pi = \vec{P}_\mu + \vec{P}_\nu \quad \Rightarrow \left(\text{البيون ساكن}\ \vec{P}_\pi = 0\right) \Rightarrow \quad \vec{P}_\mu = -\vec{P}_\nu \qquad (*)$$

لدينا أيضاً:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \Rightarrow E_\pi^2 - p_\pi^2c^2 = m_\pi^2c^4 \Rightarrow E_\pi^2 = m_\pi^2c^4 \Rightarrow E_\pi = m_\pi c^2$$

$$E_\mu^2 - p_\mu^2c^2 = m_\mu^2c^4 \Rightarrow E_\mu^2 = p_\mu^2c^2 + m_\mu^2c^4 \Rightarrow E_\mu = c\sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2c^2}$$

$$E_\nu^2 - p_\nu^2c^2 = m_\nu^2c^4 \quad ; \quad \text{كتلة النترينو}\ (m_\nu = 0)$$

$$E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad E_\nu = |p_\nu|.c$$

نعوض هذه الطاقات في معادلة انحفاظ الطاقة:

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu \quad \Rightarrow \quad m_\pi c^2 = c\sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2} + |p_\nu|.c$$

$$\Rightarrow \quad m_\pi c^2 - |p_\nu|.c = c\sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2}$$

بالتربيع نجد:

$$[m_\pi c^2 - |p_\nu|.c]^2 = c^2\left(p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2\right) \Rightarrow [m_\pi c - |p_\nu|]^2 = p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2$$

وفق$(*)$ $\left[m_\pi c - \left|p_\mu\right|\right]^2 = p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2 \quad \Rightarrow m_\pi^2 c^2 + p_\mu^2 - 2m_\pi c p_\mu = p_\mu^2 + m_\mu^2 c^2$

$$\Rightarrow m_\pi^2 c - m_\mu^2 c = 2m_\pi p_\mu \Rightarrow \left|\vec{p}_\mu\right| = \frac{\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)c}{2m_\pi}$$

نعوض $\left|\vec{p}_\mu\right|$ في العلاقة: $E_\mu^2 - p_\mu^2 c^2 = m_\mu^2 c^4$

$$E_\mu^2 = p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4 = \left(\frac{\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)c}{2m_\pi}\right)^2 c^2 + m_\mu^2 c^4$$

$$= c^4\left[m_\mu^2 + \frac{m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2m_\pi^2 m_\mu^2}{4m_\pi^2}\right]$$

$$= c^4\left[\frac{4m_\mu^2 m_\pi^2 + m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2m_\pi^2 m_\mu^2}{4m_\pi^2}\right] = c^4\left[\frac{2m_\mu^2 m_\pi^2 + m_\pi^4 + m_\mu^4}{4m_\pi^2}\right]$$

$$= c^4\left[\frac{m_\mu^2 + m_\pi^2}{2m_\pi}\right]^2 \Rightarrow E_\mu = c^2\left(\frac{m_\mu^2 + m_\pi^2}{2m_\pi}\right)$$

لدينا من جهة أخرى:

$$\vec{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

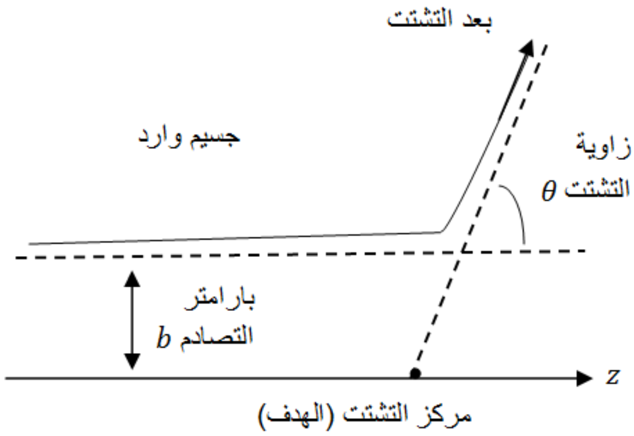
$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \quad \Rightarrow \quad v_\mu = \frac{p_\mu c^2}{E_\mu}$$

بتعويض قيم E_μ و p_μ نجد:

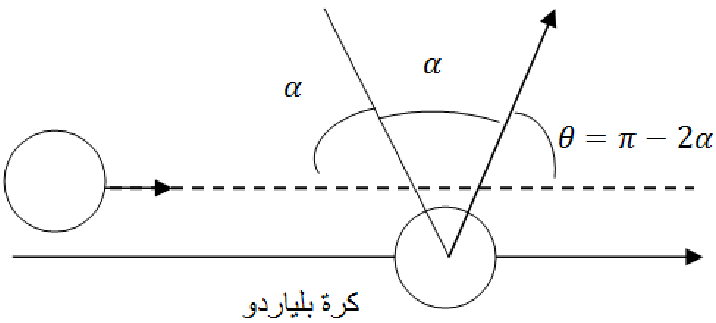
$$v_\mu = \frac{\left(\frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi}\right)c^2}{c^2\left(\frac{m_\mu^2 + m_\pi^2}{2m_\pi}\right)} = \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}\right)c$$

نظرية التشتت أو التبعثر:

ترد جسيمة على هدف (مركز التشتت) بطاقة E وبارامتر صدم b (أقصر مسافة بين مسار الجسيم الوارد والمحور z المار من الهدف) فتتبعثر بزاوية θ مبتعدة عن الهدف.



تنحصر دراسة مسألة التشتت وفق المنهج الكلاسيكي في حساب بارامتر الصدم b وإيجاد زاوية التبعثر θ ، وكمثال بسيط على ذلك نأخذ تصادم كُرَتي بلياردو (تصادم مرن).



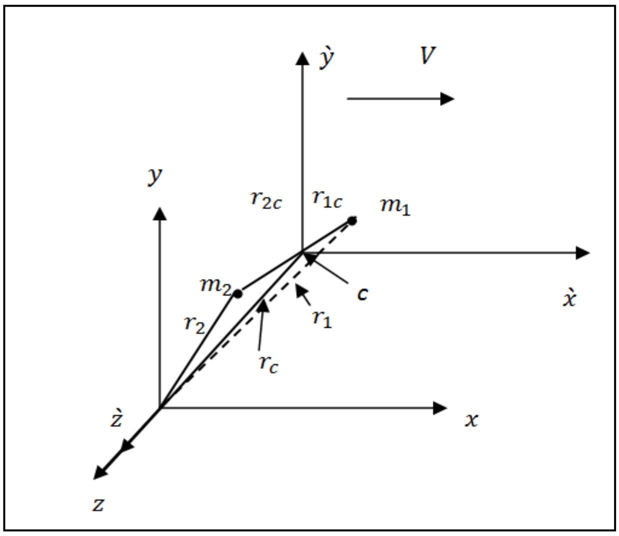
$$\theta = \pi - 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{R} \Rightarrow R\sin\alpha = b$$

$$b = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow b = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

يرتبط بارامتر الصدم بزاوية التبعثر.

لنفرض الآن أنَّ الجسيمتين تتبادلان التأثير فيما بينهما بعد اقتراب إحداهما من الأخرى بمعزل عن أي تأثير خارجي، ولننسب هاتين الجسيمتين إلى جملتين إحداهما ساكنة $oxyz$ والأخرى متحركة بالنسبة للأولى بسرعة $\vec{V}$ ولتكن $\acute{o}\acute{x}\acute{y}\acute{z}$، كما يوضح الشكل التالي:



حيث: $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ موضعي الجسيمتين بالنسبة للجملة الساكنة $oxyz$، r_{1c} و r_{2c} موضعي الجسيمتين بالنسبة للجملة المتحركة $\acute{o}\acute{x}\acute{y}\acute{z}$.

نستطيع أن نكتب الآن:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_c + \vec{r}_{1c} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_c + \vec{r}_{2c} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{V}_c + \vec{V}_{1c} \\ \vec{V}_2 &= \vec{V}_c + \vec{V}_{2c} \end{aligned} \qquad (2)$$

حيث: $\vec{r}_c$ و $\vec{V}_c$ موضع وسرعة مركز الكتل c بالنسبة للجملة الساكنة $oxyz$.

لدينا أيضاً:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{1c} - \vec{r}_{2c} \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V}_{1c} - \vec{V}_{2c}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_{1c} - \vec{V}_{2c} = \vec{V} \qquad (3)$$

لدينا مركز الكتل c يقع في مركز الجملة المتحركة، ويتعين بالعلاقة:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_{1c} + m_2\vec{r}_{2c}}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Rightarrow \; m_1\vec{r}_{1c} + m_2\vec{r}_{2c} = 0 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \; m_1\vec{r}_{1c} + m_2(\vec{r}_{1c} - \vec{r}) = 0$$

$$\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_{1c} + \vec{r}_{1c} - \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{1c}\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) = \vec{r} \Rightarrow \vec{r}_{1c}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) = \vec{r}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}_{1c} = \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

حيث $M = \; m_1 + m_2$

$$\Rightarrow \qquad \vec{V}_{1c} = \frac{m_2}{M}\vec{V}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\vec{r}_{2c} = -\frac{m_1}{M}\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_{2c} = \frac{-m_1}{M}\vec{V} \qquad (5)$$

حلّ مسألة التبعثر (التشتت)، أي إيجاد سرع الجسيمات المتشتتة (بعد التشتت):

نكتب العلاقة التالية باستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة في جملة مركز الكتل:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\mu V^2 + U}_{\text{الطاقة الكلية للجزيء قبل التشتت}} = \underbrace{\frac{1}{2}\mu \grave{V}^2 + \grave{U}}_{\text{الطاقة الكلية للجزيء بعد التشتت}}$$

الكتلة النسبية $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$

$\grave{V}$ و V: سرعتا الجزيء النسبي قبل وبعد التصادم في جملة مركز الكتل.

$\grave{U}$ و U: الطاقة الكامنة للجملة قبل وبعد التشتت، وبما أنَّ الجملة معزولة والتصادم مرن يكون $V = \grave{V}$.

للحصول على سرعتي الجسيمتين بعد التصادم يجب أن نأخذ بعين الاعتبار سرعة مركز الكتل $\mathrm{V_R} = \frac{dR}{\mathrm{dt}}$

وبالتالي نكتب:

$$\vec{\grave{V}}_i = \vec{\grave{V}}_{ic} + \vec{V}_R \;\; \Rightarrow \;\; \vec{\grave{V}}_1 = \vec{\grave{V}}_{1c} + \vec{V}_R = \frac{m_2}{M}\vec{\grave{V}} + \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{M}$$

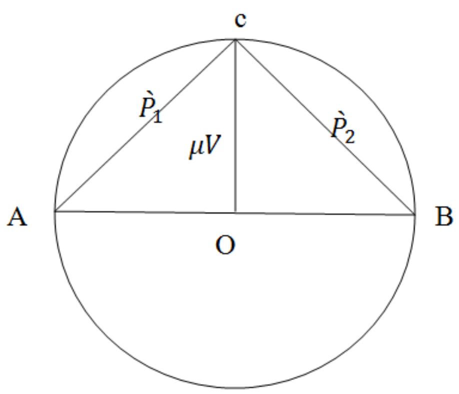
$$\vec{\grave{V}}_2 = \vec{\grave{V}}_{2c} + \vec{V}_R = -\frac{m_1}{M}\vec{\grave{V}} + \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{M}$$

نشير هنا إلى أنّهُ يمكن الانتقال بهاتين العلاقتين إلى الشكل الهندسي وذلك من خلال إبراز متجه الاندفاع حيث نكتب العلاقتين السابقتين كما يلي:

$$\vec{\grave{P}}_1 = \mu\vec{\grave{V}} + \frac{m_1}{M}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)$$

$$\vec{\grave{P}}_2 = -\mu\vec{\grave{V}} + \frac{m_2}{M}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)$$

نرسم الآن دائرة مركزها O ونصف قطرها μV



$$\overrightarrow{AC} = \vec{\grave{P}}_1 \;\; , \overrightarrow{CB} = \vec{\grave{P}}_1$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{M}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{M}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)$$

لنفرض أنَّ الجسيمة ذات الكتلة m_2 ساكنة، وهذا يعني:

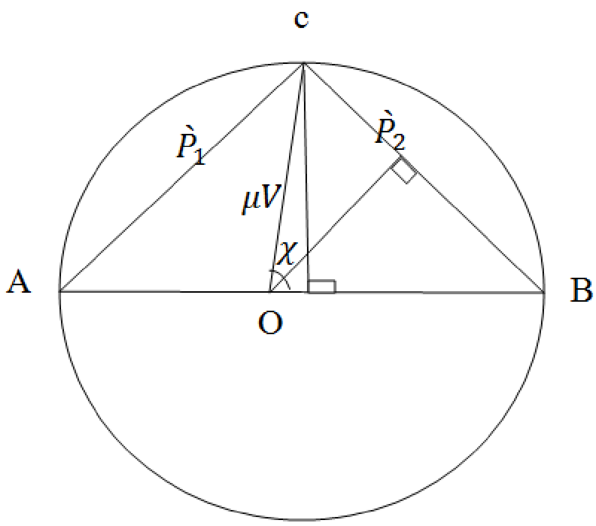
$$\vec{V}_{2c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \vec{V}_{1c}$$

لأنَّ: $\vec{V} = \vec{V}_{1c} - \vec{V}_{2c}$

هذا بدوره يؤدي إلى أنَّ: $\vec{P}_2 = 0$، ومنه نجد:

$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{M}\vec{P}_1 = \mu\vec{V} \quad \text{(نصف القطر)}$$

وهذا يتطلب أن تقع B هي الأخرى على محيط الدائرة.



نرسم عموداً من C على OB ونكتب:

$$\vec{\grave{P}}_1 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{AO}.\overline{OC}.\cos(\pi - \chi)$$

$$(m_1\grave{V}_1)^2 \qquad \left(\frac{m_1}{M}P_1\right)^2 \qquad (\mu V_1)^2$$

بالإصلاح نجد:

$$m_1^2\grave{V}_1{}^2 = \frac{m_1^2}{M^2}P_1^2 + \mu^2 V_1^2 - 2\left(\frac{m_1}{M}P_1\right)(\mu V_1)\cos(\pi - \chi)$$

$$m_1^2\grave{V}_1{}^2 = \frac{m_1^2}{M^2}m_1^2V_1^2 + \frac{m_1^2m_2^2}{M^2}V_1^2 + 2\left(\frac{m_1}{M}m_1V_1\right)\left(\frac{m_1m_2}{M}V_1\right)\cos(\chi)$$

$$\grave{V}_1{}^2 = \frac{m_1^2}{M^2}V_1^2 + \frac{m_2^2}{M^2}V_1^2 + 2\left(\frac{V_1}{M}\right)\left(\frac{m_1m_2}{M}V_1\right)\cos(\chi)$$

$$\grave{V}_1^2 = \frac{V_1^2}{M^2}(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi)$$

حيث: $V_1^2 = V^2$ هذا يعني أنَّ $\grave{V}_1$ سرعة تشتت الجسيمة الأولى معلومة، أمّا من أجل $\grave{V}_2$ سرعة تشتت الجسيمة الثانية، نرسم عموداً من O على CB، ونكتب:

$$\sin\frac{\chi}{2} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\grave{P}_2/2}{\mu V} \Rightarrow \grave{P}_2 = 2\mu V \sin\frac{\chi}{2} \Rightarrow \mathrm{m}_2\grave{V}_2 = \frac{2m_1\mathrm{m}_2 V}{M}\sin\frac{\chi}{2}$$

$$\Rightarrow \grave{V}_2 = \frac{2m_1 V}{M}\sin\frac{\chi}{2}$$

وهي تمثل سرعة الجسيمة الثانية بعد التشتت.