كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الرابعة

المادة : ميكانيك الكم٢

المحاضرة : ١+٢/نظري/

المحاضرة 1و2 لمقرر ميكانيك الكم (2) لطلاب السنة الرابعة فيزياء – د. سمر عمران

معادلة ديراك

اقترح العالم الفيزيائي ديراك عام 1928 كتابة المعادلة النسبية للطاقة بشكل خطي بالنسبة للاندفاع (المشتق الأول للإحداثيات)، كما أنها من المرتبة الأولى بالنسبة للطاقة (المشتق الأول بالنسبة للزمن):

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \qquad (1)$$

وفي الميكانيك النسبي تُعطى بالعلاقة:

$$E^2 = c^2 \sum_{\mu=0}^{3} p_\mu p_\mu = c^2(p^2 + m_0^2 c^2) \qquad (2)$$

حيث: $p_\mu(p_0, \vec{p}_i)$ الاندفاع في الفراغ الرباعي التمثيل، $\vec{p}_i$ الاندفاع في الفراغ الثلاثي، $i = 0,1,2 \ldots\ldots$

اقترح ديراك كتابة العلاقة (1) على شكل عبارة خطية بالنسبة للاندفاع p_μ :

$$E = c\sum_{\mu=0}^{3} \alpha_\mu p_\mu = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m_0 c) \qquad (3)$$

نجد من العلاقتين (2) و (3):

$$\left(p_i^2 + m_0^2 c^2\right) = (\alpha_i p_i + \beta m_0 c)^2 \qquad (4)$$

حيث: $i = 1,2,3$

بمطابقة الحدود بين الطرفين في (4)، نجد:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \\ &\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ &\alpha_i^2 = 1\,,\;\; \beta^2 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ملاحظة: نذكر بأنَّ مصفوفات باولي التي تصف حركة الالكترون الذي سبينه $S_e = \frac{1}{2}$ تملك الخصائص السابقة نفسها، ومصفوفات باولي هي:

$$\acute{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \acute{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \;,\; \acute{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

ولكي يصل ديراك إلى هدفه كان يحتاج لـ 4 مصفوفات وليس لـ ثلاث ورباعية القياس $(\mu = 0,1,2,3)$، وللتخلص من هذه المشكلة اقترح ديراك أخذ تركيب مصفوفات رباعية الأبعاد ρ_i و σ_i، ترتبط مع المصفوفات ثنائية الأبعاد (مصفوفات باولي) بالعلاقات التالية:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_i = \begin{pmatrix} \acute{\sigma}_i & \acute{0} \\ \acute{0} & \acute{\sigma}_i \end{pmatrix} \;;\quad i = 1,2,3 \\ &\rho_1 = \begin{pmatrix} \acute{0} & \acute{I} \\ \acute{I} & \acute{0} \end{pmatrix} \;,\; \rho_2 = \begin{pmatrix} \acute{0} & -i\acute{I} \\ +i\acute{I} & \acute{0} \end{pmatrix} \;,\; \rho_3 = \begin{pmatrix} \acute{I} & \acute{0} \\ \acute{0} & -\acute{I} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

حيث $\acute{\sigma}_i$ هي مصفوفات باولي ثنائية القياس، وكذلك:

$$\acute{0} = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\qquad \acute{I} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تحقق المصفوفات σ_i و ρ_i العلاقات التي تحققها مصفوفات باولي نفسها.

$$\sigma_i^2 = \rho_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\sigma_k \\ &\rho_i\rho_j = -\rho_j\rho_i = i\rho_k \end{aligned}\right\} \qquad (i,j,k = 1,2,3)$$

أو بصورة مختصرة:

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = \rho_i\rho_j + \rho_j\rho_i = 2\delta_{ij}$$

إضافة إلى ما سبق عرّف ديراك المصفوفة α_μ كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i = \rho_1\sigma_i = \begin{pmatrix} \acute{0} & \acute{\sigma}_i \\ \acute{\sigma}_i & \acute{0} \end{pmatrix} \;;\quad i = 1,2,3 \\ &\alpha_0 = \rho_3 = \begin{pmatrix} \acute{I} & \acute{0} \\ \acute{0} & -\acute{I} \end{pmatrix} = \beta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

إضافة إلى ذلك يمكننا بسهولة التحقق من الخصائص التالية التي تحققها المصفوفات α_μ:

$$\alpha_1^2 = \rho_1^2\sigma_1^2 = I \qquad , \qquad \alpha_0^2 = \rho_3^2 = I$$

$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = \rho_1^2(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2) = 0$$

$$\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_0 = \sigma_1(\rho_3\rho_1 + \rho_1\rho_3) = 0$$

يمكننا كتابة مصفوفات ديراك بالشكل التالي:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \alpha_0 = \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تَابَعَ ديراك دراسة المعادلة الموجية النسبية المكافئة لمعادلة شرودنغر وهي:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi \tag{10}$$

والتي تحدّد كثافة الاحتمال الموجية $\rho = \Psi^*\Psi$ ، فنكتب معادلة ديراك بالشكل:

$$\left(\widehat{\mathrm{E}} - \widehat{\mathrm{H}}_{\mathrm{D}}\right)\Psi = 0 \tag{11}$$

حيث يقابل المؤثران العبارتين التاليتين:

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \widehat{\mathrm{H}}_{\mathrm{D}} = \mathrm{c}\alpha_{\mathrm{n}}\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}} + \rho_3 m_0 c^2 \tag{12}$$

عند وجود حقل كهرطيسي خارجي مُعطى بالكمونين $(\vec{A}, \phi)$، يأخذ المؤثران السابقان الصيغتين التاليتين:

$$\hat{F} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi \qquad , \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} \tag{13}$$

وبالتالي تؤول معادلة ديراك بوجود حقل كهرطيسي إلى الصيغة التالية:

$$\left[\hat{F} - c(\alpha_{\mathrm{n}}\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}}) - \rho_3 m_0 c^2\right]\Psi = 0 \quad ; \quad n = 1,2,3 \tag{14}$$

اختار ديراك التابع الموجي Ψ على شكل عمود (مصفوفة عمودية) مؤلف من أربعة عناصر، وذلك للتناسب بعدد الأسطر والأعمدة في مصفوفات ديراك، كما يلي:

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Psi^{+}=(\Psi_1^* \quad \Psi_2^* \quad \Psi_3^* \quad \Psi_4^*) \qquad (15)$$

حيث Ψ^{+} مرافق التابع الموجي Ψ.

يمكننا الحصول على الشكل المصفوفي للعلاقة (14) باستبدال قيم المصفوفات ρ_3 و α_n ذات الأربعة أعمدة، حيث نجد:

$$\begin{pmatrix}(F-m_0c^2) & 0 & -cp_z & -c(p_x-ip_y)\\ 0 & (F-m_0c^2) & -c(p_x+ip_y) & cp_z\\ -cp_z & -c(p_x-ip_y) & (F+m_0c^2) & 0\\ -c(p_x+ip_y) & cp_z & 0 & (F+m_0c^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}=0$$

ومنه نحصل على جملة أربع معادلات:

$$(F-m_0c^2)\Psi_1-cp_z\Psi_3-c(p_x-ip_y)\Psi_4=0$$

$$(F-m_0c^2)\Psi_2-c(p_x+ip_y)\Psi_3+cp_z\Psi_4=0$$

$$(F+m_0c^2)\Psi_3-c(p_x-ip_y)\Psi_2-cp_z\Psi_1=0$$

$$(F+m_0c^2)\Psi_4+cp_z\Psi_2-c(p_x+ip_y)\Psi_1=0$$

كثافة الاحتمال وكثافة التيار:

نكتب الشكل المرافق للمعادلة (14) بالصيغة التالية:

$$\Psi^{+}\left[\hat{F}-c(\alpha_n\hat{p}_n)-\rho_3m_0c^2\right]=0 \qquad (16)$$

ملاحظة: عند انتقال Ψ^{+} تتغير الإشارة، مثل على ذلك:

$$-\Psi^{+}(i\hbar\nabla)=(i\hbar\nabla)\Psi^{+} \qquad , \qquad \Psi^{+}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi^{+}$$

وبالتالي نكتب المعادلتين (14) و (16) بالشكل التالي:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}-\mathrm{e}\phi\right)\Psi-c\left[\alpha\left(-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}A\right)\right]\Psi--\rho_3 m_0 c^2\Psi=0 \qquad (17)$$

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}-\mathrm{e}\phi\right)\Psi^+-c\left[i\hbar\nabla-\frac{e}{c}A\right]\Psi^+\alpha_n--m_0c^2\Psi^+\rho_3=0 \qquad (18)$$

لنضرب المعادلة (17) بالتابع Ψ^+ من جهة اليسار، والمعادلة (18) بالتابع Ψ من جهة اليمين، ومن ثم نطرح ناتج ضرب (18) من ناتج ضرب (17)، نجد:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^+\Psi)+div(\Psi^+\alpha_n\Psi)=0 \qquad (19)$$

وبالتالي بمطابقتها مع معادلة الاستمرار:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\vec{j}=0 \qquad (20)$$

نحصل على معادلتي الاستمرار لكثافتي الاحتمال ρ و $\vec{j}$ بعد ضرب الطرفين بـ ec:

$$\left.\begin{aligned}\rho(\vec{r},t)&=e\Psi^+\Psi\\ \vec{j}(\vec{r},t)&=ec\,\Psi^+\alpha\Psi\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

نعرّف كثافة احتمال وجود جسيم واحد في الفراغ بالعلاقة:

$$\rho_0=\frac{\rho}{e}=\Psi^+\Psi=\Psi_1^*\Psi_1+\Psi_2^*\Psi_2+\Psi_3^*\Psi_3+\Psi_4^*\Psi_4 \qquad (22)$$

نلاحظ أنَّ $\rho_0>0$ (موجبة) دوماً، مما يخالف نتائج معادلة (غلين− جوردن)

الحركة الحرّة للإلكترون النسبي $(v\sim c)$:

دراسة حركة الإلكترون تعني تعيين طاقته $(\mathrm{E_e})$ والتوابع الموجية التي تصف هذه الحركة. لهذا الغرض نكتب معادلة ديراك بالشكل التالي:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\widehat{H}_D\Psi \qquad (23)$$

حيث: $\widehat{\mathrm{H}}_{\mathrm{D}}=\mathrm{c}\alpha\hat{p}+(m_0c^2)\rho_3$

تصف المعادلة (23) السويات المستقرة للجملة المتحركة (الكمونان السلمي ϕ والمتجه $\vec{A}$ ثابتان). يُعطى التابع الموجي الذي يصف تلك الحالات بالصيغة التالية:

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r})exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t\right) \tag{24}$$

نعوض (24) في (23)، نجد:

$$\varepsilon\Psi(\vec{r}) = \widehat{H}_D\Psi(\vec{r}) \tag{25}$$

لتسهيل حلّ المعادلة (25) نكتب التابع الموجي $\Psi(\vec{r})$ بالصيغة المصفوفية التالية:

$$\Psi(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{26}$$

حيث:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \chi(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \tag{27}$$

باستخدام العلاقة (26)، وقيم المصفوفات α , ρ_3 تأخذ المعادلة (23) الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varphi \\ \varepsilon & \chi \end{pmatrix} = \left[c\begin{pmatrix} 0 & \acute{\sigma} \\ \acute{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\hat{P} + m_0c^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varepsilon\varphi = c(\acute{\sigma}\hat{P})\chi + (m_0c^2)\varphi \\ \varepsilon\chi = c(\acute{\sigma}\hat{P})\varphi - (m_0c^2)\chi \end{array}\right\} \tag{28}$$

توصف السويات الموافقة لاندفاع محدد بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\left.\begin{array}{l} (m_0c^2 - \varepsilon)\varphi + c(\acute{\sigma}\hat{P})\chi = 0 \\ c(\acute{\sigma}\hat{P})\varphi - (m_0c^2 + \varepsilon)\chi = 0 \end{array}\right\} \tag{29}$$

تُكافئ العلاقتان (29) معادلة ديراك (25). لكي يكون لهما حلّ يجب أن يكون معين الأمثال مساوياً الصفر، أي:

$$\begin{vmatrix} (m_0c^2 - \varepsilon) & c(\acute{\sigma}\hat{P}) \\ -c(\acute{\sigma}\hat{P}) & (m_0c^2 + \varepsilon) \end{vmatrix} = 0 \tag{30}$$

نفك المعين بإجراء العمليات الحسابية وباستخدام العلاقة التالية:

$$\left(\sigma\vec{A}\right)\left(\sigma\vec{B}\right) = \vec{A}\vec{B} + i\sigma\left(\vec{A}\,\Lambda\,\vec{B}\right) \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad m_0^2c^4 - \varepsilon^2 + c^2P^2 = 0 \quad or \quad \varepsilon = \pm E_p \tag{32}$$

حيث: $E_p = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$ طاقة الجسيم و $\acute{\sigma}\acute{\sigma} = (\acute{\sigma})^2 = \mathrm{I} = 1$

توافق الإشارتان $\pm$ في العلاقة (32) حلّين لمعادلة ديراك بخصوص الإلكترون الحرّ:

يسمى الحل الأول $\varepsilon = +E_p = +c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$ بالحل الموجب لمعادلة ديراك، وهو الحلّ الموافق للحالات (للسويات) التي طاقتها موجبة القيمة.

يسمى الحل الثاني $\varepsilon = -E_p$ بالحل السالب لمعادلة ديراك، وهو الحلّ الموافق للحالات (للسويات) التي طاقتها السالبة القيمة (أي مضاد الجسيم)، حيث يسمى مضاد الإلكترون بوزيترون. ولهذه التسميات التي أدخلها ديراك بُعداً حقيقياً لمفهوم خلق وفناء الأزواج (الإلكترونات، بوزيترونات).

الصيغة المكافئة لمعادلة ديراك:

نكتب معادلة ديراك بشكل متناظر بالنسبة للإحداثيات والزمن. ولهذا الغرض نُدخل الإحداثيات الرباعية $X_\mu = (X_i, i\,ct)$ ، والمصفوفات الجديدة $\gamma_\mu = (\gamma_i\,, \gamma_4)$ التي يُعبر عنها بدلالة المصفوفات $\beta\,, \alpha_i$ من خلال العلاقات التالية:

$$\gamma_i = \frac{\beta}{i}\alpha_i = -i\,\beta\,\alpha_i = i\begin{pmatrix} 0 & -\acute{\sigma} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_4 = \beta \tag{33}$$

نشير إلى حقيقة كون المصفوفات الجديدة γ_μ هرميتية وتحقق العلاقات التالية:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad ; \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4) \tag{34}$$

بفرض أنَّ $\hbar = c = 1$ ، في هذه الحالة تأخذ معادلة ديراك الشكل التالي:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha_i\nabla - \beta m_0\right)\Psi = 0 \tag{35}$$

نضرب طرفي المعادلة (35) بالمقدار $(-\beta)$ فنجد:

$$\left(\frac{\beta}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\beta}{i}\alpha_i\nabla+\beta^2 m_0\right)\Psi=0 \qquad (36)$$

وبالاستفادة من جملة العلاقتين (33) نجد:

$$\left(\gamma_4\frac{\partial}{\partial X_4}+\gamma_i\frac{\partial}{\partial X_i}+m_0\right)\Psi=0 \qquad (37)$$

أي أنَّ:

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial X_\mu}+m_0\right)\Psi=0 \qquad (38)$$

بإدخال الرمز $\hat{P}=\gamma_\mu P_\mu$ إلى المعادلة (38) نجد:

$$\left(i\hat{P}+m_0\right)\Psi=0 \qquad (39)$$

حيث: $$P_\mu=-i\frac{\partial}{\partial X_\mu}$$

تُمثّل العلاقة (39) الصيغة المكافئة لمعادلة ديراك وتأخذ المعادلة المرافقة لمعادلة ديراك الصيغة التالية:

$$\overline{\Psi}\left(-i\hat{P}+m_0\right)=0 \qquad (40)$$

يُسمى التابع $\overline{\Psi}$ التابع ديراك المرافق.

يمكن لمعادلة ديراك أن تأخذ شكلاً آخر باستخدام مقياس فاينمان $\mathrm{X}_\mu=\left(X_0\,,\vec{\mathrm{X}}\right)$:

$$\left(\hat{P}-m_0\right)\Psi=0 \qquad (41)$$

حيث:

$$\gamma_0=\beta\,,\quad \gamma_n=\beta\alpha_n\quad,\quad P_\mu=i\hbar\frac{\partial}{\partial X_\mu}\quad,\quad \hat{P}=\gamma_\mu P_\mu$$

وكذلك:

$$\gamma_0={\gamma_0}^+\,,\quad (\gamma_n^F)^+=-\gamma_n^F$$

وبالتالي تأخذ عبارتا كثافة الشحنة الكهربائية والتيار الكهربائي وفقاً للتمثيل الجديد لمعادلة ديراك الشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= e\Psi^{+}\Psi = e\overline{\Psi}\,\gamma_4\Psi \\ \vec{J} &= ce\,\Psi^{+}\alpha_i\Psi = ice\overline{\Psi}\,\gamma_i\,\Psi \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

يمكن دمج العلاقتين (42) بمعادلة واحدة من الشكل التالي:

$$J_\mu = (\vec{J}_i\,, ic\rho) = ic\rho\overline{\Psi}\,\gamma_\mu\,\Psi \tag{43}$$

وبالتالي معادلة الاستمرار (معادلة انحفاظ الشحنة) تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial J_\mu}{\partial X_\mu} = 0$$

ملاحظات عن بعض خصائص المصفوفات:

تحقق المصفوفات $\gamma_\mu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ رباعية القياس (4×4) الشرط التالي:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \tag{44}$$

بما أنَّ المصفوفات γ_μ غير تبديلية ومربع كل منها يساوي إما $(+I)$ أو $(-I)$ ، فإنَّ جداء أي عدد منها يعطي إحدى المصفوفات الست عشرة المنتمية إلى خمسة أصناف:

Pseudos-scalar (شبه السلمي) *P*

Axial (المحوري) *A*

Tensor (التنسوري) *T*

Vector (المتجهي) *V*

Scalar (السلمي) *S*

إنَّ مربع هذه المصفوفات $(\gamma_\mu)^2$ يساوي $(+I)$ أو $(-I)$.

تُحدّد المصفوفة γ_5 كما يلي:

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 \qquad (45)$$

وهي مصفوفة غير تبديلية مع المصفوفة γ_μ أي:

$$\gamma_\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma_\mu = 0 \qquad (46)$$

كماأنَّ: $(\gamma_5)^2 = +1$

مقلوب المصفوفة γ_5 نحصل عليه بعكس ترتيب جداءاتها:

$$(\gamma_5)^{-1} = (i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0)^{-1} = -i\gamma_0\gamma_3\gamma_2\gamma_1 \qquad (47)$$

أثر المصفوفة (Trace) : يحدّد مجموع العناصر القطرية ما يسمى أثر المصفوفة، ويُعرّف بالمساواة التالية:

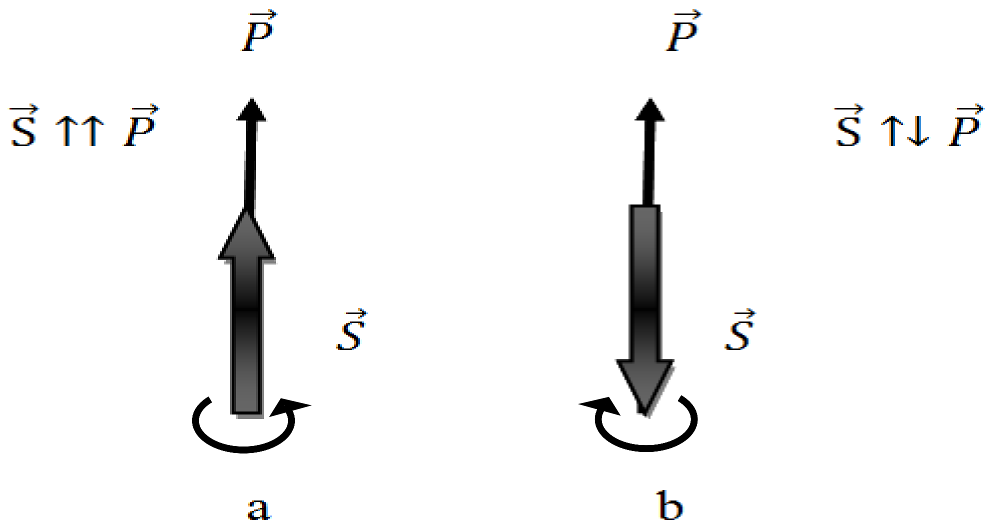
$$Tr\gamma_A = \begin{cases} 4 & ; \quad \gamma_A = I \\ 0 & ; \quad \gamma_A \neq I \end{cases}$$

مؤثر الاستقطابية:

يمكننا تمييز قيم فيزيائية مرتبطة بوجود سبين الجسيم تدعى الاستقطابية أو الحلزنة (الحلزنة هي اتجاه الحركة الدورانية للجسيم حول نفسه بالنسبة لاتجاه اندفاعه)، نعرّف مؤثر الاستقطابية بالعلاقة التالية:

$$\widehat{\Lambda}_S = \hat{S}.\frac{\hat{P}}{|P|} \qquad (48)$$

تظهر الاستقطابية بوضوح من مسقط السبين على اتجاه حركة الإلكترون كما هو مبين في الشكل التالي، حيث يُمثل الشكل a الاستقطاب الموجب اليميني $(S_\mathrm{R} = +1)$، أمّا الشكل b فيمثل الاستقطاب السالب اليساري $(S_L = -1)$ للإلكترون.



إذا وجّه الإلكترون وفق المحور oz فإنَّ $\vec{P} = (0,0,P_z)$ وعليه يكون:

$$\widehat{\Lambda}_s = \hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar\widehat{\Sigma}_z = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

أي أنَّ القيم الخاصة للمؤثر $\widehat{\Lambda}_s$ تساوي $\frac{1}{2}\hbar$. والتوابع الخاصة الموافقة للمؤثر $\widehat{\Lambda}_s$ هي:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} ,\begin{pmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{pmatrix} ,\begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix} ,\begin{pmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{pmatrix} \tag{50}$$

حيث يوافق التابع u_1 الحالة $\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{P}$ في حين أنَّ التابع u_{-1} يوافق الحالة $\vec{S} \uparrow\downarrow \vec{P}$ ويعطيان بالمصفوفتين التاليتين:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: القيم الخاصة لمؤثر معطى على شكل مصفوفة قطرية تتطابق مع القيم الخاصة لعناصر القطر.