كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : ميكانيك الموائع

المحاضرة: السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

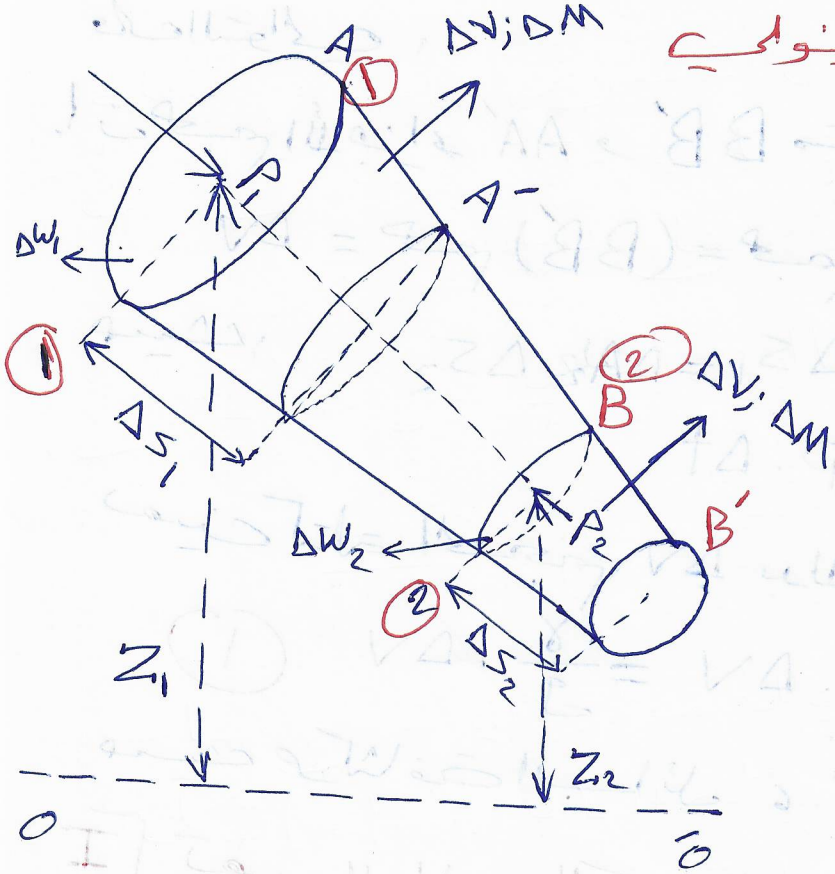
كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مقرر: الموائع — السنة: الثالثة

المحاضرة: السادسة — د. عكي أسد

معادلة برنولي



نعتمد من أجل استنتاج معادلة برنولي على مفهوم النظرية الشائعة الاستعمال في الميكانيك والقائلة بأن تغير الطاقة الحركية لجسم عند انتقاله لمسافة ما يساوي مجموع عمل جميع القوى (الداخلية والخارجية) الخاصة بذلك الجسم من أجل نفس المسافة.

نقتطع جزءاً من أنبوبة التيار بطول AB محدداً بالمقطعين (1-1) و (2-2) حيث يرتفع المقطع الأول عن مستوى المقارنة OO' بمقدار Z_1 والمقطع الثاني بمقدار Z_2 ولتكن مساحة المقطع الأول ΔW_1 والمقطع الثاني ΔW_2

يتنقل المقطع (1-1) من الجزء AB خلال الزمن Δt مسافة ΔS_1 والمقطع الثاني (2-2) مسافة ΔS_2 ونلاحظ أنه

$$\Delta S_1 = u_1 \cdot \Delta t \quad ; \quad \Delta S_2 = u_2 \cdot \Delta t$$

حيث u_1 و u_2 السرعة في المقطع (1-1) و (2-2) على التوالي.

إن حجم الأجزاء AA' و BB' متساوية أي:

$$\text{حجم } (AA') = \text{حجم } (BB') = \Delta V$$

حيث:

$$\Delta V = \Delta W_1 \cdot \Delta S_1 = \Delta W_2 \cdot \Delta S_2$$
$$= \Delta \varphi \cdot \Delta t$$

نعين كتلة الحجم ΔV بدلالة ΔM فيكون

$$\Delta M = \rho \cdot \Delta V = \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta V \quad (1)$$

حيث ρ كثافة السائل و γ: الوزن النوعي

I تغير الطاقة الحركية للجزء (AB) عند انتقاله إلى الوضعية $A'B'$

نفرض أن K_E يمثل الطاقة الحركية وبالتالي يمكن كتابة المعادلة الآتية من الشكل التالي:

$$\Delta(K_E) = K_E(A'B') - K_E(AB)$$
$$= K_E(A'B + BB') - K_E(AA' + A'B)$$
$$= K_E(BB') - K_E(AA')$$

أي

$$\Delta(K_E) = \frac{u_2^2 \cdot \Delta M}{2} - \frac{u_1^2 \cdot \Delta M}{2}$$

بمراعاة المعادلة (1) نجد

$$\Delta(K_E) = \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta V \frac{u_2^2}{2} - \frac{\gamma}{g} \cdot \Delta V \frac{u_2^2}{2}$$

$$= \left(\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}\right) \times \gamma \cdot \Delta V \quad (2)$$

II عمل القوى عند انتقال الجزء AB إلى الوضعية A'B'

عند الانتقال المذكور نحصل على عمل القوى التالية:

1) قوة الثقل: يعطى عمل قوة الثقل بالشكل الآتي

$$W_1 = (Z_1 - Z_2) \cdot \gamma \cdot \Delta V \quad (3)$$

2) عمل قوى الضغط الهيدرو ديناميكي المؤثر على المقاطع (1-1) و (2-2) من جهة السائل المحيط نعبر عن عمل هذه القوى بالمعادلة التالية:

$$W_2 = (P_1 \cdot \Delta W_1)\Delta S_1 - (P_2 \cdot \Delta W_2) \cdot \Delta S_2$$

$$= (P_1 - P_2) \cdot \Delta V \quad (4)$$

حيث P_1 و P_2 على التوالي الضغط الهيدرو ديناميكي على المقطع الأول W_1 والثاني W_2

3) عمل قوى الضغط الخارجية للسائل المحيط بجدران المجرى المدروس: إن عمل هذه القوى يساوي الصفر لأنها عمودية على انتقال الجزيئات السائلة في حدود سطح المجرى (AB)

4) عمل قوى الضغط الداخلية (قوى التأثير المتبادل بين جزيئات السائل المشكلة للجزء AB وتوجد هذه القوى في الاتجاهين المختلفين ومن أجل نفس مسافة الانتقال وبالتالي مجموع عملها يساوي الصفر

5) عمل قوى الاحتكاك (الداخلية والخارجية) يساوي الصفر لأن قوى الاحتكاك في السائل المدروس (سائل مثالي) غير موجودة

III الاستنتاج النهائي: باستخدام نظرية تغير الطاقة الحركية، ينتج

$$\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}\gamma.\Delta V = (Z_1 - Z_2).\gamma.\Delta V + (P_1 - P_2).\Delta$$

بتقسيم المعادلة السابقة على $(\gamma.\Delta V)$ نحصل على المعادلة

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 \quad (5)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل العام التالي:

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + Z = cons\,t \quad (6)$$ (في صدد التيار)

تدعى المعادلة (6) بمعادلة برنولي للسوائل المثالية عند الجريان المستقر.

يتضح من معادلة برنولي التي تجمع بين القيم (U، P و Z) أن مجموع حدودها الثلاثة يساوي قيمة ثابتة بالنسبة لخط تيار واحد بينما سيكون لخط تيار مجاور قيمة أخرى ثابتة.

* تمثل المعادلة (6) معادلة برنولي للارتفاعات حيث كل حد من حدودها واحدة قياس الطول m

الحد الأول: $\frac{U^2}{2g}$ يمثل ارتفاع السرعة الذي تصل إليه نقطة مادية إذا قذفت شاقولياً للأعلى في مجرة خالية من الهواء بسرعة ابتدائية مقدارها U.

الحد الثاني: $\frac{P}{\gamma}$ يمثل ارتفاع الضغط (ارتفاع الضخ) ويكافئ ارتفاع عمود سائل ساكن وزنه النوعي (γ) والذي يولد نتيجة ثقله الضغط (P)

الحد الثالث: Z ويمثل الارتفاع المكاني أو الهندسي بالنسبة

لأي مستوى قياس أفقي أو مستوى صفري يمكن اختياره لأحد الطرفين.

وعلى هذا الأساس يمكن التعبير عن المعادلة (6) بالجملة التالية: بالنسبة لجريان مثالي مستقر يكون مجموع ارتفاع السرعة وارتفاع الضغط (الضغي) والارتفاع المكاني.

بضرب طرفي المعادلة (6) بالوزن النوعي $\gamma = \rho \cdot g$ ينتج:

$$\frac{\rho \cdot u^2}{2} + P + \gamma Z = const = C_{BP} \quad (7)$$

والتي تمثل معادلة برنولي للضغوط وهي تسمى قانون الضغط في اتجاه الجريان ويمكن التأكد بسهولة أن كل حد من حدود الطرف الأيسر في المعادلة له وحدة قياس الضغط $\frac{N}{cm^2}$ يسمى الحد الأول بالضغط الحركي (الديناميكي) أو ضغط الركود ويسمى الحد الثاني بالضغط الستاتيكي والحد الثالث بضغط الثقالة.

إن المضمون الفيزيائي لحدود معادلة برنولي يتوضح بشكل أعمق إذا قسمنا طرفي المعادلة (7) على الكثافة ρ حيث تنتج الصيغة الثالثة لمعادلة برنولي

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g \cdot Z = const = C_{BE} \quad (8)$$

التي يطلق عليها معادلة برنولي للطاقة لأن كل حد من حدود الطرف الأيسر يمثل الطاقة بالنسبة لوحدة الكتلة، فالحد الأول يمثل الطاقة الحركية والحد الثاني يمثل طاقة الضغط والحد الثالث يمثل الطاقة الكامنة