كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

يتعين المستقيم بإحدى طرق:

1) نقطة معلومة وشعاع توجيه له.

2) نقطتين معلومتين له.

3) تقاطع مستويين.

1) معادلة مستقيم مار من نقطة معلومة وموازي شعاعاً معلوماً:

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة من ℓ.

$\vec{u}(a, b, c)$ شعاع توجيه لـ ℓ.

$M_0M \parallel \vec{u}$ $\quad \overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$\vec{u}(a, b, c)$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad (1)$$

وهو الشكل الديكارتي لمعادلة المستقيم.

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{u}$ *

$\overrightarrow{M_0M} = t\cdot\vec{u} \quad t \in \mathbb{R}$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = (ta, tb, tc)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-x_0 = ta \\ y-y_0 = tb \\ z-z_0 = tc \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{array}} \quad (2)$$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم ℓ.

ملاحظات:

(1) من العلاقة (2) نلاحظ أن النسبتين الأولى والثانية تمثل مستوياً يوازي oz والنسبتين الأولى والثالثة تمثل مستوياً يوازي oy والنسبة الثانية والثالثة مستوياً يوازي ox فيكون المستقيم ℓ هو الفصل المشترك لأي مستويين من هذه المستويات الثلاث.

(2) في العلاقة (1) قد يكون أحد المقامات معدوماً (أو مقامان على الأكثر معدومين) وهذا جائز عندما يكون حامل توجيه المستقيم عمودياً على أحد المحاور الإحداثية أو على أحد المستويات الإحداثية وعندئذٍ يكون البسط المقابل لكل مقام معدوم معدوماً أيضاً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: اكتب المعادلات الوسيطية والديكارتية للمستقيم المار من النقطة $M_0(1,2,-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ وأوجد إحداثيات نقاط تقاطعه مع إحداثيات الإحداثية

الحل: $u(2,3,1)$ $M_0(1,2,-1)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

وهي المعادلات الوسيطية

الشكل الديكارتي لمعادلة المستقيم $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{1}$

يقاطع المستقيم مع (xoy) عندما $z = 0$

$-1 + t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

$(3,5,0)$

يقاطع المستقيم مع (xoz) عندما $y = 0$

$2 + 3t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$

$\left(-\dfrac{1}{3}, 0, -\dfrac{5}{3}\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتقاطع المستقيم مع (yoz) عندما $x=0$

$1+2t=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$ $\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$(0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

(2) معادلة مستقيم مار من نقطتين معلومتين

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2-x_1)t \\ y = y_1 + (y_2-y_1)t \\ z = z_1 + (z_2-z_1)t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

تمرين: اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من

$M_1(2, 1, -1)$ $M_2(1, -1, 2)$

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 2, 3)$

يتبع تتمة المستقيم بالطلب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الشكل المتكافئ:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$$

المعادلات الوسطية:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

3) معادلة مستقيم معين بمقاطع مستويين:

$$P_1(x,y,z) = p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0$$
$$P_2(x,y,z) = p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0 \quad \Big\} \ (3)$$

P_1 يلي $n_1(p_1, q_1, r_1)$ $\quad$ P_2 يلي $n_2(p_2, q_2, r_2)$

عندما لا يكون N_1 و N_2 مرتبطان خطياً P_1 و P_2 مستويان يقبل مشترك

حيث كل نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم تحقق كلتا

المعادلتين فنقول أن المستقيم ℓ معين بالمعادلتين (3) والتي

نسميها بالمعادلتين الأساسيتين للمستقيم.

* لتعرف على اتجاه توجيه المستقيم ℓ.

بإعطاء أي المجاهيل (x,y,z) قيمة اختيارية ينتج لدينا جملة

معادلتين مجهولين لنا يحصل على قيمة المجهولين الباقيين وبالتالي

نقطة للمستقيم ℓ.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

كيف ننتقل من (3) إلى (2) ؟

نفرض أحد المجاهيل هو الوسيط t ثم نحل جملة معادلتين مجهولين على اعتبار الوسيط ثابت

ملاحظة:

صحيح أن اختيار أحد المجاهيل هو أمر اختياري ولكن ليس بشكل مطلق مع ضمان أن المعادلتين الناتجتين لا تختلفان مستقيمان متوازيان

مثلاً عند اختيار $z=t$ كمجهول عليك أن تضمن

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$$

تمرين: أوجد المعادلات الوسيطية والديكارتية للمستقيم المعين بالمعادلتين الأساسيتين:

$$L: \begin{cases} x - y + 2z - 5 = 0 \\ 3x + 5y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

$\vec{n_1}(1,-1,2)$ $\quad$ $\vec{n_2}(3,5,-4)$

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = (1)(5) - (3)(-1) = 5 + 3 = 8 \neq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نختار $z = t$ ونعوض في المعادلتين الأساسيتين:

① $x - y = 5 - 2t$

② $3x + 5y = 1 + 4t$

نضرب المعادلة ① بـ (-3) ونجمعها مع المعادلة ② لينتج y،

ونضرب المعادلة ① بـ (5) ونجمعها مع المعادلة ② لينتج x،

$$8y = -14 + 10t$$

$$\Rightarrow y = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4}t$$

$$8x = 26 - 6t$$

$$\Rightarrow x = \frac{13}{4} - \frac{3}{4}t$$

نضع المعادلات الوسيطية:

$$\begin{cases} x = \frac{13}{4} - \frac{3}{4}t \\ y = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4}t \quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

الشكل الديكارتي:

$$\vec{u} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 10\vec{j} - 8\vec{k}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\vec{u}(-6, 10, 8)$

نعوض $z=0$ ونعوض في المعادلتين الأساسيتين:

① $x-y=5$

② $3x+5y=1$

نضرب المعادلة ① بـ (-3) ونجمعها مع المعادلة ② فنحذف y:

$8y=-14 \Rightarrow y=-\frac{7}{4}$

نعوض y في المعادلة ① ونجد x:

$x+\frac{7}{4}=5$

$\Rightarrow x=5-\frac{7}{4} \Rightarrow x=\frac{20}{4}-\frac{7}{4}$

$$x=\frac{13}{4}$$

$\Rightarrow M_0\left(\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}, 0\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z