كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال:

$y' + \frac{1}{x} y = 3x$

أوجد حل المعادلة بطريقة أويلر:

$M = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$

$(-3x + \frac{1}{x} y)dx + dy = 0$

$\Rightarrow (-3x^2 + y)dx + x\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\Rightarrow$ المعادلة أصبحت تامة

$\Rightarrow -3x^2 dx + y\,dx + x\,dy = 0$

$-x^3 + yx = c$

الحل العام:

$y = \frac{c}{x} + x^2$

معادلة برنولي:

سنحل المعادلة:

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{(n)} \quad \dots (1)$$

حيث $n \neq 1,\ n \neq 0$

طريقة الحل: نقسم على $y^{(n)} \neq 0$

$$y^{-n}\cdot y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x) \quad \dots (2)$$

نفرض: $Z = y^{1-n} \Leftarrow Z' = (1-n)\,y^{-n}\,y'$

$$\Rightarrow \frac{Z'}{1-n} + p(x)\,Z = q(x)$$

$$Z' + (1-n)\,p(x)\,Z = (1-n)\,q(x) \quad \dots (3)$$

إن (3) فيها حل عام:

$$Z = c\,e^{-\int (1-n)p(x)dx} + e^{-\int (1-n)p(x)dx} \int e^{(1-n)p(x)dx}\, q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow y^{1-n} = c\,e^{-\int (1-n)p(x)dx} + e^{-\int (1-n)p(x)dx} \int q(x)\, e^{\int (1-n)p\,dx}\,dx$$

مثال (4):

$$y' - 2x\,y = 2x^3 y^2$$

حل المعادلة

$$y^{-2}y' - 2x\,y^{-1} = 2x^3$$

نفرض $Z = y^{-1} \Leftarrow Z' = -y^{-2}y'$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow -z' - 2xz = 2x^3 \Rightarrow z' + 2xz = -2x^3$

$z = ce^{-x^2} - 2e^{-x^2}\int e^{x^2} x^3\,dx$

نفرض $I = \int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^2 \cdot x e^{x^2} dx$

نفرض: $u = x^2 \Leftarrow du = 2x\,dx$

و $dv = x e^{x^2} dx \Leftarrow v = \frac{e^{x^2}}{2}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \int x e^{x^2} dx$

$= \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2}$

$\frac{1}{y} = ce^{-x^2} - 2e^{-x^2}\left[\frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2}\right]$

$\frac{1}{y} = ce^{-x^2} - x^2 + 1$

$y = \frac{1}{ce^{-x^2} - x^2 + 1}$

وهو الحل العام لمعادلة برنولي (4)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال عن عامل التكميل:

حل المعادلة التالية:

$$y\,dx + (x - x^3y^3)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 3x^2y^3$$

المعادلة غير تامة

نبحث عن عامل التكميل:

نفرض $w = xy$

$$\frac{dM}{M} = \frac{1 - 1 + 3x^2y^3}{(x - x^3y^3)y - yx}\,dx\,y$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{3x^2y^3}{-x^3y^4}\,dx\,y$$

$$\ln M = -3\ln(x\,y) \Rightarrow M = \frac{1}{x^3y^3}$$

$$\frac{1}{x^3y^2}\,dx + \left(\frac{1}{x^2y^3} - 1\right)dy = 0$$

$$\frac{1}{x^3y^2}\,dx + \frac{1}{x^2y^3}\,dy - dy = 0$$

بالتكامل:

$$\boxed{-\frac{1}{2x^2y^2} - y = c}$$

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وغير محلولة بالنسبة للمشتق

شكلها العام هو:

$$f(x, y, y') = 0 \quad \ldots (5)$$

حيث لا يمكن عزل y' بطرف

أحد أشكال هذه المعادلة:

$$A_n y'^n + A_{n-1} y'^{n-1} + \cdots + A_1 y' + A_0 = 0 \quad \ldots (6)$$

حيث $A_0, A_1, \ldots A_n$ توابع لـ x و y

إذا استطعنا تحليل كثير الحدود بالمجهول y' نضع المعادلة (6) بالشكل:

$$(y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0 \quad \ldots (7)$$

نميز الآن الحالة الآتية:

إما

$$y' - f_1(x,y) = 0 \Rightarrow \text{محلولة للمشتق} \Rightarrow \text{تكامل العام}$$

$$\psi_1(x, y, c) = 0$$

أو

$$y' - f_2(x,y) = 0 \Rightarrow \psi_2(x, y, c) = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y' - f_n(x,y) = 0 \qquad \psi_n(x, y, c) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لسنا الآن تكامل عام للمعادلة (7):

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots \psi_n = 0$$

مثال: $y'^2 - 2yy' - y^2(e^x - 1) = 0 \quad \dots (8)$

أوجد تكامل العام

$$\Delta = 4y^2 - 4(-y^2)(e^x - 1)$$

$$= 4y^2 e^x > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2y e^{\frac{x}{2}}$$

$$y' = \frac{2y + 2y e^{\frac{x}{2}}}{2} = y\left[1 + e^{\frac{x}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 + e^{\frac{x}{2}}$$

$$\ln y = x + 2e^{\frac{x}{2}} + c$$

$$\psi_1 : \boxed{\ln y - x - 2e^{\frac{x}{2}} - c = 0}$$

أو $y' = \frac{2y - 2y e^{\frac{x}{2}}}{2} = y\left[1 - e^{\frac{x}{2}}\right]$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 - e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \ln y = x - 2e^{\frac{x}{2}} + c$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \psi_2 : \boxed{\ln y - x + 2e^{\frac{x}{2}} - c = 0}$$

بتكامل عام لـ (8):

$$\left(\ln y - x - 2e^{\frac{x}{2}} - c\right)\left(\ln y - x + 2e^{\frac{x}{2}} - c\right) = 0$$