كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي

المحاضرة : **الثانية/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

العمليات على المصفوفات:

1 الضرب بمقدار سلمي λ:

لتكن المصفوفة $A=[a_{ij}]$ فوق الحقل التبديلي K وليكن λ مقدار سلمي من K غير معدوم $\lambda A=[a_{ij}]$

مثال

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 0\\ 3 & 6\end{bmatrix} \rightarrow 2A=\begin{bmatrix}4 & 10\\ -2 & 0\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

وبالعكس: أي في حال وجود عدد مشترك بين عناصر المصفوفة يمكن إخراجه كعامل مشترك.

مثال

$$B=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -9 & 12\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

2 جمع المصفوفات:

لتكن: $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

لها نفس السعة عندئذ:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

مثال

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 1 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2-5 & 5+0\\ -1+1 & 0+3\\ 3+6 & 4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 0 & 3\\ 9 & 6\end{bmatrix}$$

مثال $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\\ 0 & 5\end{bmatrix}_{3\times 2}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 6 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$

لا يمكن جمع A و B لأنه ليس لهما نفس المرتبة

- خواص جمع المصفوفات:

1) الجمع عملية تبديلية:

$$A+B=B+A$$

2) عملية تجميعية:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

مثال $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 6\end{bmatrix}$

$$(A+B)+C=$$

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 11\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=$$

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 8\\ -2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 11\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B)+C=A+(B+C)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات هو المصفوفة الصفرية والتي لها نفس السعة.

4) المنقول: $(A+B)^T = A^T + B^T$

3 طرح المصفوفات:

نعرف طرح: $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

لها نفس السعة عندئذٍ:

$$A-B = A+(-B)$$

في المثال السابق (مثال الخاصية التجميعية):

$$A-B=\begin{bmatrix}2-0 & -3-3\\ 1-1 & 5-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -6\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

أيضاً من المثال السابق:

$$2A-3B=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 2 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 9\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -15\\ -1 & 10\end{bmatrix}$$

4 ضرب المصفوفات:

لتكن المصفوفتين $A=[a_{ij}]_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times n}$

p تعني لك أن: عدد أسطر B = عدد أعمدة A

عندئذٍ يمكن حساب:

$$A\times B = C=[a_{ij}]_{m\times n}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{1j} & a_{1p}\\ a_{21} & a_{2j} & a_{2p}\\ a_{i1} & a_{ij} & a_{ip}\\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mp}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_{11} & b_{1j} & b_{1n}\\ b_{21} & b_{2j} & b_{2n}\\ b_{i1} & b_{ij} & b_{in}\\ b_{p1} & b_{p2} & b_{pn}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$C=[c_{ij}]=[a_{i1}\cdot b_{ij}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\dots+a_{ip}+b_{jp}]$

مثال: $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}_{3\times2}$, $B=\begin{bmatrix}-5 & 2 & 6 & 4\\ 0 & 3 & 1 & -2\end{bmatrix}_{2\times4}$

$A\times B$ فيمكن ضرب B عدد أسطر = A عدد أعمدة

$A\times B=C=[c_{ij}]_{3\times4}$

$$A\times B=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ 2(-5)+3\cdot0 & 2(2)+3(3) & 2(6)+3(1) & 2(4)+3(-2)\\ 1(-5)+0(0) & 1(2)+0(3) & 1(6)+0(1) & 1(4)+0(-2)\\ -5(-5)+2(0) & -5(2)+2(3) & -5(6)+2(1) & -5(4)+2(-2)\end{bmatrix}$$

(c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{31}, c_{32}, c_{33}, c_{34})

$$A\times B=\begin{bmatrix}-10 & 13 & 15 & 2\\ -5 & 2 & 6 & 4\\ 25 & -4 & -28 & -24\end{bmatrix}=C$$

* ملاحظة: قد يمكن ضرب $B\times A$ لأن عدد أعمدة B = عدد أسطر A

مثال: $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}_{2\times1}$

نلاحظ أن عدد أعمدة A = عدد أسطر B = 2 فيمكن ضرب $A\times B$

$$A\times B=\begin{bmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+5(4)\\ 0(1)-3(4)\end{bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix}22\\ -12\end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

يمكن إجراء $A \times B$ و $B \times A$ كما يلي:

أو

مربعة

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $\quad$ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

$B = [b_{ij}]_{n \times m}$ $\quad$ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -11 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ نلاحظ أن: $A \times B \neq B \times A$

- خواص ضرب المصفوفات:

1) ضرب المصفوفات ليس عملية تبديلية:

$A \times B \neq B \times A$

2) عملية تجميعية:

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

3) عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع:

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

4) العنصر الحيادي بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات هو المصفوفة الواحدية I_n حيث n هي رتبة المصفوفة.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = A$$

نتيجة: ضرب المصفوفة بمصفوفة أحادية هي المصفوفة نفسها.

5) المنقول:

$$(A \times B)^T = B^T \cdot A^T$$

نقول عن مصفوفتين A, B أنهما متوافقتان بالضرب إذا كان:

$A \cdot B = O$ حيث $A \neq 0$ و $B \neq 0$

مثال: بين أن A, B مصفوفتان متوافقتان بالضرب

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{3\times 2}$$

$\Leftarrow$ A, B متوافقتان ضربياً.

5 قوى المصفوفات:

1) $A^n = A \times A \times \dots A$

2) $A^n \times A^m = A^{n+m}$

3) $(A^n)^m = A^{n \times m}$

6 ـ تكبير مدد المصفوفة:

لتكن $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة مربعة ، ولتكن:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$

المرفقتين فوق الفل السابق x

كثير حدود المصفوفة A ونرمز له بالرمز $P(A)$ هو عبارة عن مصفوفة مربعة تعطى بالشكل:

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + a_0 I_n$$

- نقول أن A هي جذر لكثير الحدود إذا كان: $P(A) = O_n$

مثال: هل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ جذر لكثير الحدود $P(x) = 2 + x - 3x^2$

الحل: حسب $P(A) = 2I_2 + A - 3A^2$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \neq O_2$$

$\Leftarrow$ A ليس جذر لكثير الحدود.

7) المحددات:

يطبق مفهوم المحددات على المصفوفات المربعة ونرمز لمحدد مصفوفة مربعة بالرمز: $\det(A)$ أو $|A|$

- لحساب محدد مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2(6) - 5(-3) = 27$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 4(-2) = 11$$

- المحدد من الرتبة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

لحساب قيمة المحدد:

الطريقة الأولى:

طريقة ساريوس:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})]$$

مثال:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$|A| = (3(-1)(4) + 1(1)(3) + 2(0)(1)) - (2(-1)(3) + 3(1)(1) + 1(0)(4))$

$= -12 + 3 + 0 - (-6 + 3 + 0) = -6$

- صغر عنصر:

ليكن $|A|$ من الدرجة n وليكن $a_{ij} \in A$

صغر العنصر a_{ij} هو محدد من الدرجة $n-1$

نحصل عليه بحذف سطر وعمود العنصر a_{ij}

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

صغر العنصر a_{21}

$$O_{2\times1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$= a_{12} \times a_{33} - a_{32} \times a_{13}$

صغر العنصر a_{32}

$$O_{3\times2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} \times a_{23} - a_{21} \times a_{13}$

- خواص المحددات:

1) $|A| = |A^T|$

2) محدد مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4)(3)(2) = 48$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) المبادلة بين سطرين أو عمودين في المحدد تغير من إشارة المحدد وتغير من قيمته

(أي في المثال السابق اذا بادلنا يكون الناتج 68-)

4) إذا تناسب سطرين أو عمودين فإن قيمة المحدد تساوي صفر

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\times 2)$$

5) اذا ضربنا جميع عناصر سطر أو عمود في المحدد بعدد $\lambda \neq 0$ فإن قيمة المحدد تضرب بالعدد λ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(4)(1) = 8$$

اذا ضربنا السطر الأول بـ 3

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 8 = 24$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z