كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : ميكانيك فيزيائي١

المحاضرة : ١+٢/ن+ع/ د.صالح

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

11

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحاضرة الأولى — ميكانيك فيزيائي 1

* المقدمة: إن التعبير عن الكميات في علم الفيزياء لابد أن يكون من خلال الأرقام والواحدات المناسبة وهو ما يكفي لوصفها وصفاً صحيحاً.

1- واحدات القياس: عند تناول موضوع واحدات القياس وهو موضوع أساسي في العلوم النظرية والتطبيقية لابد من التأكيد على أن الواحدات الثلاثة الأساسية المتر، الكيلوغرام، الثانية هي وحدات قياس الكميات الثلاثة الأساسية الطول، الكتلة، الزمن والمتداولة في دراسة علم الميكانيك وقد تم زيادتها لاستكمال وحدات النظام الدولي للقياس ليكون شاملاً لباقي الفروع العلمية كالكهرباء والديناميك الحراري وغيرها وذلك بإضافة أربع كميات أساسية أخرى هي: الكلفن، الأمبير، الشمعة، المول وهي وحدات قياس الكميات الأساسية الأخرى درجة الحرارة، التيار الكهربائي، شدة الإضاءة، كمية المادة، ثم تلا ذلك إضافة الراديان كواحدة قياس الزاوية المستوية والستراديان كوحدة لقياس الزاوية المجسمة. هذا النظام هو النظام الدولي للقياس International System اختصاراً (IS)

الكمية	الوحدة	الرمز
الطول	المتر	m
الكتلة	الكيلوغرام	kg
الزمن	الثانية	s
درجة الحرارة	الكلفن	K
شدة التيار	الأمبير	A
قوة الإضاءة	الكانديلا (شمعة)	cd
كمية المادة	المول	MOL

وقد شاع استخدام ثلاثة انظمة معيارية في مجال القياسات وهي
1- النظام المتري 2- النظام الكاوسي 3- النظام البريطاني

1- النظام المتري: تقاس الكميات الثلاثة الأساسية في هذا النظام الطول بالمتر والكتلة بالكيلوغرام والزمن بالثانية

2- النظام الكاوسي: تقاس الكميات الأساسية الطول بالسنتيمتر والطول بالغرام والزمن بالثانية

3- النظام البريطاني: الطول بالقدم والكتلة بالباوند والزمن بالثانية

2- الكميات العددية: هي تلك الكمية التي يمكننا أن نعبر تعبيرا كاملاً بمعرفة
1- مقدارها
2- وحدة قياسها
ويُمثل ذلك عادة بعدد متبوع بوحدة قياس مناسبة فمثلاً عندما نقول أن كتلة جسم ما تساوي 5 دون ذكر وحدة قياس الكتلة المستخدمة فإن ذلك يجعلنا نتساءل هل وحدة القياس هي الكيلوغرام أم باوند أم غرام ولكننا عندما نقول أن الكتلة تساوي 5Kg نكون قد أوضحنا المسألة إيضاحاً تاماً

3- الكميات المتجهة: هي الكمية الفيزيائية التي يمكننا تعيينها تعيين كاملاً بمعرفة كل من: 1- مقدارها العددي 2- اتجاهها 3 نقطة تأثيرها
4- محور عملها

ومن الأمثلة المألوفة عن الكميات المتجهة: القوة، الإزاحة السرعة، التسارع ----
ويرمز عادة للمقدار المتجه بحرف يعلوه سهم في حين يرمز للطويلة بالحرف نفسه بدون سهم فمثلاً طويلة المتجه $\vec{A}$ هي A أو $|\vec{A}|$

تحتاج المقادير المتجهة كبر من نوع خاص هو جبر المتجهات — فمن أجل تحديد موقع متجه ما بالنسبة لجملة الإحداثيات ثلاثية الأبعاد يلزمنا تحديد موقعي نقطة البداية والنهاية لهذا المتجه نستطيع التعبير عن المتجه $\vec{A}$ بدلالة مركباته بالشكل التالي

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

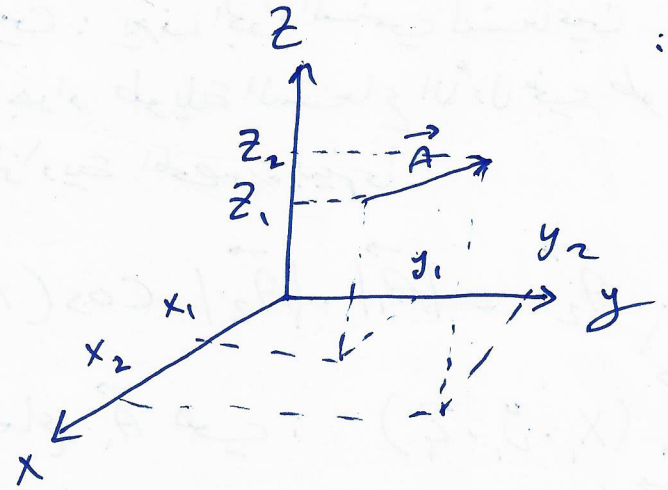
أو

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

حيث $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متجهات الواحدة على المحاور الإحداثية الثلاثة

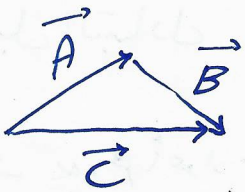
وكذلك:

$$A_x = x_2 - x_1$$
$$A_y = y_2 - y_1$$
$$A_z = z_2 - z_1$$



- نقول عن المتجهين A, B متساويان إذا كان لهما نفس الطول والاتجاه ونكتب $A=B$ أما إذا كان المتجهين لهما نفس الطول ولكن اتجاهين مختلفين نكتب $A = -B$

- لجمع $\vec{A}, \vec{B}$ بيانياً نرسم متجهاً يتناسب طوله مع $\vec{A}$ وبنفس الاتجاه ثم نرسم متجهاً آخر تقع بدايته عند نهاية الأول ويتناسب طوله مع $\vec{B}$ فيكون المتجه الواصل من بداية $\vec{A}$ إلى نهاية $\vec{B}$ مساوياً لمحصلتهما



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

- القيمة العددية للمتجه $\vec{C}$ تحسب بطريقتين الأولى هي الطريقة التحليلية والثانية باستخدام قانون تمام الجيب

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)$$

(θ) الزاوية بين الشعاعين $\vec{A}, \vec{B}$

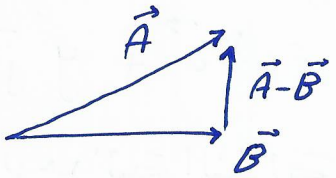
* خصائص جمع المتجهات :

1- الخاصية التبادلية: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

2- الخاصية الترافقية : $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

* طرح المتجهات :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



* الجداء السلمي لشعاعين : يعرف الجداء السلمي لشعاعين $\vec{A_1}$, $\vec{A_2}$ بأنه المقدار السلمي الناتج عن جداء طويلة الشعاع الأول في طويلة الشعاع الثاني في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما .

$$\vec{A_1} \cdot \vec{A_2} = |\vec{A_1}| \cdot |\vec{A_2}| \cos(\vec{A_1}, \vec{A_2})$$

فإذا فرضنا مركبات الشعاع $\vec{A_1}$ هي : $\vec{A_1}(x_1, y_1, z_1)$

" " " $\vec{A_2}$ هي : $\vec{A_2}(x_2, y_2, z_2)$

وأن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة الواحد على المحاور الإحداثية الثلاثية المتعامدة فنحصل على العلاقة :

$$\vec{A_1} \cdot \vec{A_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

يتمتع الجداء السلمي لشعاعين بالخواص التالية :

1- $\vec{A_1} \cdot \vec{A_2} = \vec{A_2} \cdot \vec{A_1}$ يقبل التبادل

2- $(\alpha \vec{A_1}) \cdot (\beta \vec{A_2}) = \alpha\beta \, \vec{A_1} \cdot \vec{A_2}$ حيث α, β أعداد حقيقية

3- $\vec{A}(\vec{A_1} + \vec{A_2} + \dots + \vec{A_n}) = \vec{A}\vec{A_1} + \vec{A}\vec{A_2} + \dots + \vec{A}\vec{A_n}$

أي أن الجداء السلمي يقبل التوزيع

تمرين: برهن صحة العلاقة

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2} = X_1X_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

الحل:

$$\vec{A_1} = X_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{A_2} = X_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2} = \left(X_1X_2\,\vec{i}\cdot\vec{i} + X_1y_2\,\vec{i}\cdot\vec{j} + X_1z_2\,\vec{i}\cdot\vec{k}\right.$$
$$+ y_1X_2\,\vec{j}\cdot\vec{i} + y_1y_2\,\vec{j}\cdot\vec{j} + y_1z_2\,\vec{j}\cdot\vec{k}$$
$$\left. + z_1X_2\,\vec{k}\cdot\vec{i} + z_1y_2\,\vec{k}\cdot\vec{j} + z_1z_2\,\vec{k}\cdot\vec{k}\right)$$

بالاستفادة من العلاقة

$$\vec{A_1}\cdot\vec{A_2} = |\vec{A_1}|\cdot|\vec{A_2}|\cos(\vec{A_1},\vec{A_2})$$

نجد أن

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

لأن الزاوية بين الشعاعين صفر وبالتالي $\cos(0) = 1$

وكذلك لدينا

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

لان الزاوية $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \cos\theta = 0$ نجد مايلي:

$$\vec{A_1}\vec{A_2} = X_1X_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

وهو المطلوب

نستنتج من العلاقة السابقة أن طويلة الشعاع $\vec{A}$ بدلالة مركباته على المحاور الاحداثية الثلاثة المتعامدة تعطى بالعلاقة

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

* الجداء الشعاعي لشعاعين : يعرف الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{A_1}$ ، $\vec{A_2}$ بأنه الشعاع $\vec{B}$ ، ونكتب عن ذلك بالشكل

$$B = \vec{A_1} \wedge \vec{A_2} \quad \text{أو} \quad B = \vec{A_1} \times \vec{A_2}$$

ويكون الشعاع $\vec{B}$ عمودياً على المستوى المعرف بالشعاعين $\vec{A_1}$ ، $\vec{A_2}$ في النقطة التي يرسمان منها ، وجهته تتعين بقاعدة الأصابع الثلاث لليد اليمنى حيث نوجه الإبهام باتجاه المتجه الأول $\vec{A_1}$ ، السبابة باتجاه الشعاع الثاني $\vec{A_2}$ فتكون الإصبع الوسطى باتجاه الشعاع الثالث $\vec{B}$.

أو وفق دوران البرغي ، حيث عندما يدور $\vec{A_1}$ باتجاه $\vec{A_2}$ كي ينطبق عليه فإننا نتقدم باتجاه $\vec{B}$

أما القيمة العددية للجداء الشعاعي فتعطى بالعلاقة التالية :

$$\vec{B} = |\vec{A_1}| \cdot |\vec{A_2}| \sin(\vec{A_1} \cdot \vec{A_2})$$

ويمكن كتابة الجداء الشعاعي (الخارجي) بدلالة مركباتهما على المحاور الإحداثية المتعامدة كما يلي :

$$\vec{B} = \vec{A_1} \wedge \vec{A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

يتمتع الجداء الشعاعي بالخواص التالي :

1) $\vec{A} \wedge \vec{A} = 0$ 2) $\vec{A_1} \wedge \vec{A_2} = -\vec{A_2} \wedge \vec{A_1}$

3) $\alpha \vec{A_1} \wedge \beta \vec{A_2} = \alpha\beta \, \vec{A_1} \wedge \vec{A_2}$

4) $\vec{A} \wedge (\vec{A_1} + \vec{A_2} + \dots + \vec{A_n}) = \vec{A} \wedge \vec{A_1} + \vec{A} \wedge \vec{A_2} + \dots + \vec{A} \wedge \vec{A_n}$

5) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{C} + \vec{D}) = \vec{A} \wedge \vec{C} + \vec{A} \wedge \vec{D} + \vec{B} \wedge \vec{C} + \vec{B} \wedge \vec{D}$

★ جداء ثلاث متجهات في عدة حالات :

1- $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$ ناتج هذا الجداء هو مقدار متجه حامله هو حامل المتجه $\vec{A}$ وجهته حسب إشارة الجداء السلمي $\vec{B}.\vec{C}$ ، أما طويلته فهي ناتج جداء طويلة المتجه $\vec{A}$ بالمقدار $B.C.\cos\theta$ حيث θ الزاوية المحصورة بين $\vec{B}$ و $\vec{C}$.

2- $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ ناتج هذا الجداء مقدار سلمي يساوي حجم متوازي السطوح المقام على المتجهات الثلاثة $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ ويمكن أن نكتب بأخذ السطوح المختلفة

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}(\vec{C}\times\vec{A}) = \text{ح}$$

3- $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ناتج الجداء هو مقدار متجه عمودي على كل من المتجه $\vec{A}$ والمتجه $\vec{B}\times\vec{C}$ وأهم خواص هذا الجداء أنه يسمح بتحليله إلى مجموع جدائين سلميين :

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$$

العلاقة تسمى قانون جيبس

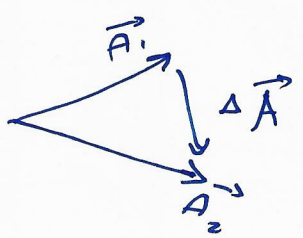
★ مشتق شعاع تابع لوسيط : إذا كان الشعاع $\vec{A}$ تابعاً لوسيط وليكن الزمن مثلاً أي $\vec{A}_{(t)}$ فإن مركباته على المحاور الاحداثية الثلاثية المتعامدة تصبح توابع للزمن أيضاً وتكتب $x_{(t)}$ ، $y_{(t)}$ ، $z_{(t)}$

فإذا فرضنا $\vec{A}_1$ ، $\vec{A}_2$ قيمتي الشعاع $\vec{A}$ في اللحظتين t_1 ، t_2 نحسب الفرق بين هذين الشعاعين $\Delta\vec{A}$ فتكون مركبات الشعاع $\Delta\vec{A}$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$



ولكن $\Delta t = t_2 - t_1$ فتكون مركبات الشعاع

$$\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{\vec{A_2} - \vec{A_1}}{t_2 - t_1}$$

هي الآنية

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

وعندما $\Delta t \to 0$ تؤول المركبات تتناهى إلى المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$$

نسمي الشعاع الذي يقبل المشتقات الثلاثة السابقة مركبات له مشتق الشعاع $\vec{A}$ نرمز له بالشعاع $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ويكتب بالشكل

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{k}$$

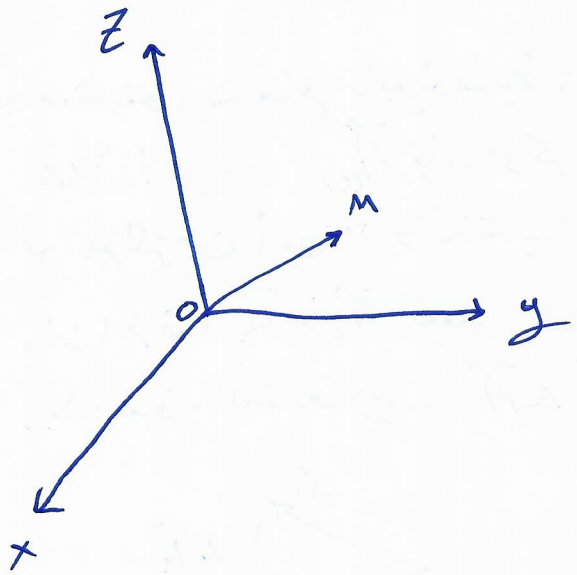
وهذه العلاقة الأخيرة معروفة كثيراً في علم الحركة وتمكن بواسطتها من تعريف شعاعي السرعة والتسارع

★ الإحداثيات الديكارتية: الشعاع $\vec{OM}$ يكتب بالصيغة التالية

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

طويلته:

$$|\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

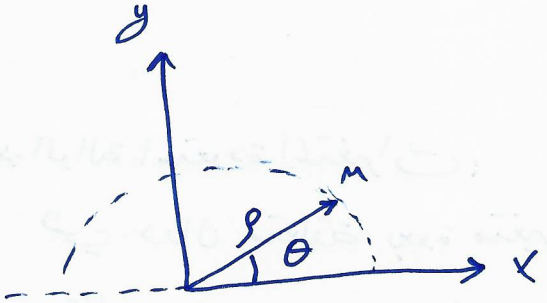


اسقاطات M عمودية على المحاور

oz, oy, ox

★ الإحداثيات القطبية : وضعية النقطة M معروفة بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ ذات الطويلة ρ و بواسطة الزاوية القطبية $\theta(t)$ التي تتغير بدلالة الزمن t إذن النقطة M معروفة بـ $M(\rho, \theta)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} \iff \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

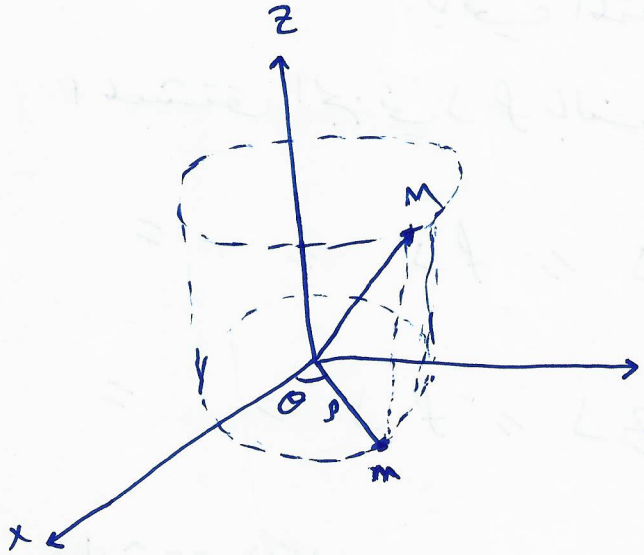


$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

★ الإحداثيات الإسطوانية :

$M(\rho, \theta, z)$

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$
$$z = z$$



ρ البعد عن المحور oz $(\rho \geq 0)$

θ زاوية الدوران حول المحور oz $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

z هو المسافة بين المستوي oxy والنقطة M $(-\infty \leq z \leq +\infty)$

★ الإحداثيات الكروية :

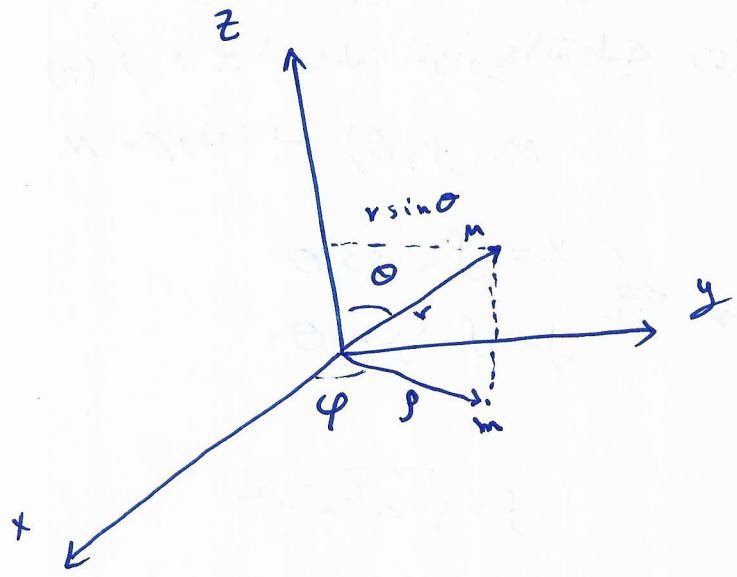
$M(r, \theta, \varphi)$ علماً أن $\rho = r\sin\theta$ وأن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$0 \leq \theta \leq \pi$; θ

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$; φ

$0 \leq r \leq \infty$; r



★ الدالة المتعددة المتغيرات:

هي دوال متعلقة بعدة متغيرات $f = f(x,y,z,t,\dots)$

مثال: $f = x^2 - y^2 + 5xz$

- المشتق الجزئي: يمكن حساب المشتقات الجزئية بالنسبة لكل متغير بفرض باقي المتغيرات ثابتة

المشتق الجزئي لـ f بالنسبة لـ x هو $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5z$

= = لـ f ÷ لـ y هو $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

= = لـ f ÷ لـ z هو $\frac{\partial f}{\partial z} = 5x$

- المشتق الكلي: يعطى المشتق الكلي لـ $f(x,y,z)$ بالنسبة للزمن

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

- التفاضل الجزئي والكلي :

نفرض دالة متعددة المتغيرات $f(x,y,z)$ يمكن حساب التفاضل الجزئي والكلي بحيث :

التفاضل الجزئي لـ f بالنسبة لـ x هو: $\partial f_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx$

" " " لـ f " لـ y هو: $\partial f_y = \frac{\partial f}{\partial y} dy$

" " " لـ f " لـ z هو: $\partial f_z = \frac{\partial f}{\partial z} dz$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

مثال :

$$f = x^2 + 2y - z^3$$

$$df = 2x\,dx + 2\,dy - 3z^2\,dz$$

★ المؤثرات التفاضلية :

المؤثر : هو رمز رياضي يدل على عملية رياضية معينة يجب اجراؤها على كل ما يلي هذا المؤثر

مثلاً : $\sqrt{3}$ علامة الجذر هي المؤثر الرياضي الذي يدل على عملية أخذ الجذر التربيعي للرقم 3

والتعبير الرياضي $\frac{d(x^2+2x+1)}{dx}$ فإن $\frac{d}{dx}$ هو مؤثر رياضي الذي يدل على اشتقاق المقدار (x^2+2x+1)

- مؤثر نبلا ∇ : هو مؤثر يستخدم خصيصاً في حساب متجهات وهو مؤثر تفاضلي يحتل في صورة نبلا بغرض اختصار تعبيرات رياضية طويلة فهو يسهل حساب المتجهات

نعرف نبلا $\vec{\nabla}$ ذو المركبات

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

حيث:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

1 مؤثر التدرج: اذا كانت $f(x,y,z)$ دالة سلمية فان تدرج مقدار شعاعي معرف كما يلي

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

مثال: احسب تدرج الدالة

$$f = 3x^2y^3z$$

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f = 6xy^3z\vec{i} + 9x^2y^2z\vec{j} + 3x^2y^3\vec{k}$$

2- مؤثر التباعد: يحسب التباعد لكل متجهي بالجداء السلمي بين $\vec{\nabla}$ وشعاع $\vec{A}$

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

حيث

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

مثال: احسب تباعد الدالة الشعاعية

$$\vec{V}_{(x,y,z)} = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = 2y - 3z^2 + 0 = 2y - 3z^2$$

3- مؤثر الدوران: يعرف دوران المتجه عموماً بأنه الجداء الشعاعي بين $\vec{\nabla}$ وشعاع $\vec{A}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

مثال: احسب دوران الشعاع

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\,\vec{i} - 3yz^2\,\vec{j} + 9xy^3\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot\, v} = (27xy^2 + 6yz)\vec{i} - 9y^3\vec{j} - 2x\vec{k}$$

ملاحظة: إذا كان $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$ نقول عن $\vec{A}$ أنه محافظ أو مشتق من كمون

4- مؤثر لابلاسيان: وفقاً للتعريف تمثل نبلا معدل تغير دالة بالنسبة لمتغير $(\vec{\nabla} A)$
ويعبر عن هذا التعريف بالصيغة الرياضية التالية

$$\Delta A = \vec{\nabla}^2 A = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} A$$

يعرف لابلاسيان لحقل شعاعي $\vec{A}(x,y,z)$

$$\Delta \vec{A} = grad(div\, \vec{A}) - rot(rot\, \vec{A})$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

$$\Delta \vec{A} = \nabla A_x\, \vec{i} + \Delta A_y\, \vec{j} + \Delta A_z\, \vec{k}$$

ويعرف لابلاسيان لحقل سلمي $A(x,y,z)$ كما يلي:

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = div(\overrightarrow{grad\, A})$$

التكاملات الشعاعية :

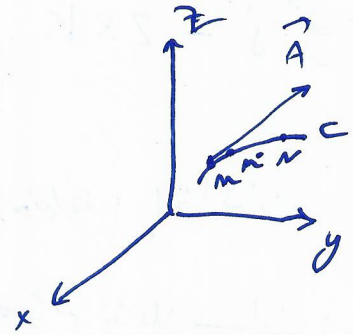
الرمز $\int_C$ للدلالة على تكامل على منحني C

الرمز $\iint_S$ للدلالة على تكامل على سطح S

الرمز $\iiint_V$ للدلالة على تكامل ثلاثي تكامل حجمي على حجم V

} نوضع علامة $\oint$ اذا كان المنحني او السطح أو الحجم مغلق

★ جولان حقل متجه : لدينا الحقل $\vec{A}(x,y,z)$ ونحسب جولانه على طول المنحني C ما بين النقطتين M و N



نحسب الجولان أولاً من أجل انتقال صغير $\vec{MM'} = \vec{dl}$ مأخوذ بالاتجاه الموجب على المنحني C الموجه من M إلى N حيث يعطى بالتعريف بالعلاقة التالية :

$$dT = \vec{A}.\vec{dl} = A.dl.\cos\theta$$

يمكن كتابة الجولان بدلالة مركبات شعاع $\vec{A}$ وذلك بفرض أن مركبات dl هي dx, dy, dz

$$dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

ونحصل على علاقة الجولان الكلي على المنحني C ما بين النقطتين M و N بعملية تكامل كما يلي :

$$T = \int_M^N dx = \int_M^N (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

نلاحظ أن جولان الحقل عبارة عن مقدار سلمي موجب أو سالب حسب قيمة الزاوية θ الكائنة بين الشعاع $\vec{A}$ والعنصر $\vec{dl}$ من المنحني

أ- برهن صحة العلاقة التالية

$$\overrightarrow{grad}(U.V) = U\,\overrightarrow{grad}\,V + V\,\overrightarrow{grad}\,U$$

الحل:

$$\overrightarrow{grad}\,(U.V) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(U.V) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(U.V) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(U.V)$$

$$grad\,(U.V) = \vec{i}\left(U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial x}\right) + j\left(U\frac{\partial V}{\partial y} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$+ \vec{k}\left(U\frac{\partial V}{\partial z} + V\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$= U\left(\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$+ V\left(\vec{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$= U\,\overrightarrow{grad}\,V + V\,\overrightarrow{grad}\,V$$

---

2. لتكن لدينا الأشعة التالية:

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{C} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

أوجد

ب- $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

ب- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&2\\2&1&-1\end{vmatrix}=-\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$$

ai,

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(-\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k})\times(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}|$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&7&5\\1&-2&2\end{vmatrix}=24\vec{i}+7\vec{j}-5\vec{k}$$

(b

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\1&-2&2\end{vmatrix}=-5\vec{j}-5\vec{k}$$

ai,

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})(-5\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&2\\0&-5&-5\end{vmatrix}=15\vec{i}+15\vec{j}-15\vec{k}$$

من ذلك نلاحظ

$$(\vec{A}\times\vec{B})\vec{C}\neq\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

3) ليكن شعاع في الإحداثيات الديكارتية

$$\vec{r} = x\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

احسب كلا من: $\overrightarrow{grad}\, r$ ، $div\, \vec{r}$ ، $\overrightarrow{rot}\, r$ ، $\vec{\nabla}^2 r$

a- حساب $\overrightarrow{grad}\, r$

$$\overrightarrow{grad}\, r = \vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{dr}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\overrightarrow{grad}\, r = \nabla . r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k}$$

$$= \frac{\vec{r}}{r}$$

b- $div\vec{r}$

$$div\vec{r} = \vec{\nabla}.\vec{r} = \frac{dx}{\partial x} + \frac{dy}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

c- $\overrightarrow{rot}\, r$

$$\overrightarrow{rot}\, r = \vec{\nabla} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

نجد :

$$\vec{\nabla}^2 r = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(4) احسب المشتقات الجزئية للدوال التالية:

$f_1(x,y) = x^2 + y^2$

$f_2(x,y) = xy^2 + \sin(y)$

$f_3(x,y,z) = x^2 \log(yz)$

$f_4(x,y,z) = \dfrac{(x-y)}{z}$

$f_5(x,y) = (x^2 - y^2)^{1/2}$

الحل:

* $f_1'(x) = \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 2x$

$f_1'(y) = \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = 2y$

$\Big\} \quad df_1(x,y) = 2x\,dx + 2y\,dy$

$f_1'(x)$, $f_1'(y)$ تمثل المشتقات الجزئية:

$df_1(x,y)$: يمثل التفاضل الكلي للدالة $f_1(x,y)$

* $f_2(x,y) = x y^2 + \sin(y)$

$f_2'(x) = y^2$, $f_2'(y) = 2xy + \cos(y)$

* $f_3(x,y,z) = x^2 \log(yz)$

$f_3'(x) = 2x \log(yz)$

$f_3'(y) = \dfrac{x^2 z}{yz} = \dfrac{x^2}{y}$

$f_3'(z) = \dfrac{x^2 y}{yz} = \dfrac{x^2}{z}$

$$* \quad f_4(x,y,z) = \frac{(x-y)}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$

$$f_4'(x) = \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z}$$

$$f_4'(y) = -\frac{z}{z^2} = -\frac{1}{z}$$

$$f_4'(z) = \frac{(0-x)}{z^2} + \frac{y}{z^2} = \frac{(-x+y)}{z^2}$$

$$* \quad f_5(x,y) = (x^2-y^2)^{1/2} = \sqrt{x^2-y^2}$$

$$f_5'(x) = \frac{1}{2}\frac{(2x)}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$f_5'(y) = \frac{1}{2}\frac{(-2y)}{\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

5) احسب دوار الشعاع

$$\vec{F} = e^{-x}(-yz\,\vec{i} + z\,\vec{j} + y\,\vec{k})$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz & z & y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(e^{-x} - e^{-x}\right)\vec{i}$$

$$+ \left(-y e^{-x} + y e^{-x}\right)\vec{j} + \left(z e^{-x} - z e^{-x}\right)\vec{k}$$

$$= 0$$