كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

- النهايات :

أولاً : - الدالة المعرفة والدالة غير المعرفة :

لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ نقول عن الدالة انها معرفة على المجال $[a,b]$ (منطقة مفروضة) إذا وجد في هذه المنطقة نقطة x_0 يكون لها صورة هي y حيث $y = f(x)$ وبالتالي تسمى الدالة معرفة

أمّا الدالة الغير معرفة هي نقطة من هذه المنطقة ليس لها صورة في y

مثال : الدالة $f(x) = \frac{x}{2-x}$

معرفة على جميع نقاط R ماعدا $\{2\}$

- التعريف بالجوار :

هو قيمة موجبة صغيرة بقدر ما نريد ويرمز لها δ (دلتا) عندئذٍ نعرف الجوار بالشكل :

$$|x - x_0| < \delta$$

خواص القيمة المطلقة ←

$$x - x_0 < \delta < x + x_0$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

الجوار من اليسار $x_0 - \delta < x$

الجوار من اليمين $x < x_0 + \delta$

وهذه الدالة في المثال السابق معرفة بجوار النقطة $x_0 = 2$

فمثلاً: الدالة $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}}$

هي دالة معرفة في جوار يسار النقطة.

أما الدالة $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ معرفة في جوار يمين النقطة

- نفرض الدالة $y = f(x)$ المعرفة على مجال مفروض وكانت نهاية هذه الدالة تساوي قيمة l عندما تسعى إلى النقطة x_0 بالتالي نعرف جوار من أجل δ و ε عددان موجبان صغيران لقدر ما نريد، بحيث يكون الشرط التالي محقق:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}$$

وهذا ما يسمى بالشرط الأساسي لتعريف النهاية
(أي إيجاد مقابل كل δ عنصر ε)

مثال: احسب النهاية الآتية حسب التعريف الأساسي للنهاية للدالة الآتية:

$$f(x) = \frac{2-x}{x-1}$$

الحل: نرهن أن هذه النهاية عند النقطة $x_0 = 0$ هي -2
الشرط الأساسي لتعريف النهاية:

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2-x}{x-1} + 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2-x}{x-1} + 2 \right| = \left| \frac{2 - x + 2x - 2}{x-1} \right| = \left| \frac{x}{x-1} \right| < |x| = |x - 0|$$

مثال: برهن حسب التعريف الأساسي نهاية الدالة $f(x)=x-3$
هي -2 عندما x تسعى إلى الواحد

الحل: $\forall \varepsilon>0; \exists \delta>0; |x+2|<\delta$
$\Rightarrow |x-3+2|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\varepsilon$

ثانياً: النظريات والقواعد الأساسية لحساب النهاية:
- النظرية الأولى:

1) $$\boxed{\lim_{x\to x_0} k f(x) = k \lim_{x\to x_0} f(x)}$$

حيث: k عدد ثابت

2) $$\boxed{\lim_{x\to x_0}(k+f(x)) = k+\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

- النظرية الثانية:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

حالة خاصة: إذا كانت $\begin{cases} f(x)=+\infty \\ g(x)=-\infty \end{cases}$ أو بالعكس

فتكون $\infty+\infty-\infty$ وهي حالة عدم تعيين نزيلها بالطرق الحسابية

- النظرية الثالثة:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x)\times g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

حالة خاصة: اذا كان $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=\infty \end{cases}$ أو العكس

تكون $\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين نزيلها بالعمليات الحسابية:

النظرية الرابعة:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}}$$

حالة خاصة: $\begin{cases} f(x)=\pm\infty \\ g(x)=\pm\infty \end{cases}$ تكون $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ في حالة عدم تعيين نزيلها بالطرق الحسابية

مثال: احسب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

الحل: $\frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين لإزالته:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})}{\cancel{1-\sqrt{x}}}=2$$

النظرية الخامسة:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0}f(x)}}$$

حالات خاصة:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

3) $\lim_{x\to +\infty}\left(1\pm\frac{1}{x}\right)^{x}=e=1^{\infty}$

4) $\lim_{x\to 0}\left(1\pm\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e=1^{\infty}$

مثال: احسب النهاية الآتية: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

الحل: هي من الشكل 1^{∞}

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}} = \boxed{\frac{e}{I}} \quad (*)$$

$$\frac{1}{x} = \alpha \Leftarrow \frac{1}{\alpha} = x$$

عندما $x \to 0$ فإن $\alpha \to \infty$

$$I = (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha \to \infty} \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-1} = e^{-1}$$

نعوض في $(*)$ $\Leftarrow$ $\frac{e}{e^{-1}} = e^2$

تذكر: $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ | $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

نتيجة: ليس من السهل حساب النهايات حسب التعريف الأساسي للنهاية بالتالي يمكن حساب النهاية حسب التعريف المباشر

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

بالاعتماد على النظريات و الخواص السابقة وحسب العمليات الحسابية يمكن إزالة حالة عدم التعيين

الاستمرارية:

أولاً: الاستمرارية عند نقطة:

من أجل الدالة $y=f(x)$ المعرفة على مجال مفروض نقول عن هذه الدالة أنها مستمرة إذا حققت الشرط:

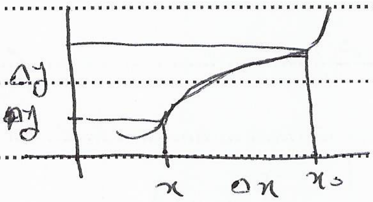
وهذا يسمى الشرط المباشر $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

أي النهاية موجودة وقيمة الدالة معرفة أما التعريف الأساسي للاستمرارية نعطي تزايد x قدره Δx يرافق تزايد Δy

$y+\Delta y = f(x+\Delta x)$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - y$

$= f(x+\Delta y) - f(x)$



نأخذ النهاية

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim (f(x+\Delta x)) - f(x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$$

حسب التعريف الأساسي للاستمرارية

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x)) - f(x) = 0$$

مثال: برهن أن الدالة الآتية $f(x)=x^2$ مستمرة من أجل $x=x_0$ حسب التعريف الأساسي للاستمرارية

الحل: نأخذ تزايد لـ x ـــ Δx

$$(f(x)+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}((x+\Delta x)^2 - x^2)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2})$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x\Delta x + \Delta x) = 0 \rightarrow$$ فالدالة مستمرة

ثانياً: الاستمرارية من اليمين واليسار:

نقول عن $f(x)$ انها مستمرة عند نقطة اذا كانت مستمرة من اليمين ومن اليسار عندئذٍ يكون لدينا الشرط:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)}$$

- لدينا ثلاثة فروق بين النهاية وقيمة الدالة:

- الفرق الأول:

النهاية موجودة والدالة غير معينة (غير معرفة)

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} = 0$$

غير معرفة $f(1) = \frac{0}{0}$

- الفرق الثاني:

النهاية غير موجودة لكن قيمة الدالة معرفة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{1}{x}}{2x} & ; x \neq 0 \\ \sin x & ; x = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن قيمة الدالة $\sin_{x \to 0} x = 0$

أما النهاية غير موجودة لأن غير موجود $\lim \sin \frac{\infty}{0} = \frac{\infty}{0}$

- الفرق الثالث:

النهاية موجودة وقيمة الدالة معرفة لكنهما غير متساويان

مثال:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \ x \neq 1 \\ x^2 & ; \ x = 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن قيمة الدالة $\underset{x\to 1}{x^2} = 1$

بينما نهايتها:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

- النهاية على شكل يمين ويسار:

مثال: برهن استمرارية الدالة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & ; \ x < 1 \\ 2 + \sin \pi x & ; \ 1 \le x < 0 \\ x + 2 & ; \ x > 0 \end{cases}$$

الحل:

تذكر: يمين أكبر ويسار أصغر
وقيمة الدالة هي المساواة

الاستمرارية عند النقطة $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} (2 + \underbrace{\sin \pi x}_{0})$$

$$\lim_{x\to 1^+} (2+0) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x+1} = 2$$

$$2 + \sin \pi x \Big|_{x=1} = 2$$

⇐ فالدالة مستمرة عند النقطة $x_0 = 1$

أما عند النقطة الصفر:

$$\lim_{x \to 0^-} (2 + \sin \pi x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x + 2) = 2$$

$$2 + \sin \pi x \Big|_{x=0} = 2$$

⇐ فالدالة مستمرة