كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة: الرابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الاستيفاء

غالباً ما نحصل في الفيزياء و العلوم الأخرى على توابع تجريبية $f(x)$ نتيجة تجربة ما يمكن كتابتها على شكل جدول كما يلي:

x	x_0	x_1	....	x_i	.....	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	....	$f(x_i)$	.....	$f(x_n)$

و قد تكون هذه القيم غير كافية للتعبير بكل جيد عن التجربة التي نجريها، بمعنى آخر نريد الحصول على قيم إضافية من أجل الحصول على نتيجة جيدة للتجربة التي نجريها.

و من أجل ذلك و اعتماداً على الجدول المعطى نقرب التابع $f(x)$ بحدودية $P_n(x)$

إن تعيين الحدودية $P_n(x)$ يعتمد على تطابق قيم التابع التجريبي $f(x)$ و الحدودية $P_n(x)$ عند النقط $x_i, i = 0,1,2, \dots, n$ أي: $f(x_i) = P_n(x_i), i = 0,1,2, \dots, n$

إن مسألة تعيين الحدودية $P_n(x)$ التي تمكننا من تعيين قيم التابع $f(x)$ عند نقط واقعة بين النقاط $x_i, i = 0,1,2, \dots, n$ تسمى بالاستيفاء الداخلي (الاستكمال) و تسمى الحدودية $P_n(x)$ بحدودية الاستيفاء كما تسمى النقاط $x_i, i = 0,1,2, \dots, n$ بنقاط الارتكاز.

سندرس ثلاث طرق في الاستيفاء و هي:

1. طريقة نيوتن غريغوري الأمامية
2. طريقة لاغرانج
3. طريقة المربعات الصغرى

أولاً: طريقة نيوتن غريغوري الأمامية:

من أجل إيجاد الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول:

x	x_0	x_1	....	x_i	.....	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	....	y_i	.....	y_n

نفرض أن المسافة بين كل نقطتين متتاليتين ثابتة و تساوي h أي:

$$x_1 - x_0 = h \,, x_2 - x_1 = h, \dots\dots, x_n - x_{n-1} = h$$

لنعرف المؤثر التفاضلي Δ كما يلي: $\Delta y_i = \Delta f_i = f_{i+1} - f_i = y_{i+1} - y_i$

تسمى هذه الفروق بالفروق الأمامية الأولى للتابع $y = f(x)$ و هذه الفروق قد تكون موجبة أو سالبة.

بالاعتماد على الفروق الأمامية الأولى يمكن إيجاد الفروق الأمامية الثانية و الثالثة و الرابعة .. الخ للتابع $y = f(x)$ كما يلي:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$
$$= y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$
$$\boldsymbol{\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}$$
$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \Delta y_{i+2} - 2\Delta y_{i+1} + \Delta y_i$$
$$= (y_{i+3} - y_{i+2}) - 2(y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)$$
$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$
$$\boldsymbol{\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i}$$

و بأسلوب مشابه نجد أن: $\boldsymbol{\Delta^4 y_i = y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i}$

و بشكل عام نكتب:

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_{i+n-k}$$

نكتب الفروق الأمامية بالجدول الآتي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

نسمي هذا الجدول بجدول الفروق الأمامية و جداول الفروق الأمامية تكون منتهية.

مثال: اكتب جدول الفروق الأمامية للتابع $f(x) = \ln x$ حيث:

$$x_0 = 0.30, x_1 = 0.40, x_2 = 0.50, x_3 = 0.60, x_4 = 0.70, x_5 = 0.80, x_6 = 0.90$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0.30	−1.20397						
		0.28768					
0.40	−0.91629		−0.06454				
		0.22314		0.02373			
0.50	−0.69315		−0.04081		−0.01110		
		0.18233		0.01263		0.00603	
0.60	−0.15082		−0.02818		−0.00507		−0.00365
		0.15415		0.00756		0.00238	
0.70	−0.35667		−0.02062		−0.00269		
		0.13353		0.00487			
0.80	−0.22314		−0.01575				
		0.11778					
0.90	−0.10536						

حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha \Delta y_0 + \binom{\alpha}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3} \Delta^3 y_0 + \cdots + \binom{\alpha}{n} \Delta^n y_0$$

حيث $\alpha = \frac{x - x_0}{h}, h = x_i - x_{i-1}$

ملاحظة:

إن الحصول على حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x)$ من الدرجة n قد يكون صعباً

لذلك نكتفي بالحصول على كثيرة حدود من الدرجة $k; k < n$

إن الخطأ المرتكب بطريقة نيوتن الأمامية يقدر بالحد الذي يلي الحد k الذي توقفنا عنده في حساب $P_k(x)$ أي $E = \binom{\alpha}{k+1} \Delta^{k+1} y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!} \Delta^{k+1} y_0$

تمرين: أوجد بطريقة نيوتن الأمامية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	16	81	256	625	1296

الحل:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0	0						
		1					
1	1		14				
		15		36			
2	16		50		24		
		65		60		0	
3	81		110		24		0
		175		84		0	
4	256		194		24		
		369		108			
5	625		302				
		671					
6	1296						

$$P_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0 + \binom{\alpha}{4}\Delta^4 y_0 + \binom{\alpha}{5}\Delta^5 y_0 + \binom{\alpha}{n}\Delta^n y_0$$

حيث $x = \frac{x-0}{1} = \frac{x-x_0}{h} = \alpha$

$$P_6(x) = 0 + x(1) + \frac{x(x-1)}{2!}(14) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}(36) + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}(24) + 0 + 0$$

$$P_6(x) = x + 7(x^2 - x) + 6x(x^2 - 3x + 2) + (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)$$

بالإصلاح نجد: $P_6(x) = x^4$.

تمرين: لتكن لدينا الدالة $y = \cos x$ المقدر قيمها بالراديان وفق الجدول الآتي:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.98007	0.92106	0.82534	0.6967	0.54030

المطلوب:

1. اكتب جدول الفروق الأمامية للدالة المعطاة.
2. أوجد حدودية استيفاء نيوتن_غريغوري من الدرجة الثالثة الموافقة لهذه الدالة.
3. أوجد قيمة تقريبية للدالة y عند $x = 0.7$ ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.2	0.98007				
		−0.05901			
0.4	0.92106		−0.03671		
		−0.09572		0.00379	
0.6	0.82534		−0.03292		0.00137
		−0.12864		0.00516	
0.8	0.6967		−0.02776		
		−0.1564			
1	0.54030				

$$x_0 = 0.2 \quad \& \quad h = x_{i+1} - x_i = 0.2$$

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0.2}{0.2} = \frac{x - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 5\left(x - \frac{1}{5}\right) = 5x - 1$$

$$P_3(\alpha) = \sum_{k=0}^{3} \binom{\alpha}{k} \Delta^k y_0$$

$$= y_0 + \alpha \Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} \Delta^3 y_0$$

و منه:

$$P_3(x) = 0.98007 + (5x-1)(-0.05901) + \frac{(5x-1)(5x-2)}{2!}(-0.03671) + \frac{(5x-1)(5x-2)(5x-3)}{3!}(0.00379)$$

$$P_3(x) = 0.9985798 + 0.01498x - 0.55363x^2 + 0.0789625x^3$$

$$P_3(0.7) = 0.7648712$$

و الخطأ المرتكب هو: $E = \binom{\alpha}{4}\Delta^4 y_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\Delta^4 y_0$

$$\alpha = 5x - 1 = 5(0.7) - 1 = 2.5$$

$$E = \binom{2.5}{4}\Delta^4 y_0 = \left|\frac{2.5(1.5)(0.5)(-0.5)}{4!}(0.00137)\right| = 0.000053515$$

ملاحظة: لو طلب منا تقدير قيمة تقريبية عند $x = 0.7$ بالاعتماد على جدول الفروق الأمامية فقط أي من دون إيجاد حدودية الاستيفاء الملائمة فإننا نوجدها بالشكل الآتي:

عندما $x = 0.7$ فإن $\alpha = 5x - 1 = 5(0.7) - 1 = 2.5$

$$P_3(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{\alpha}{3}\Delta^3 y_0$$

$$f(0.7) \approx P_3(2.5) = 0.98007 + \binom{2.5}{1}(-0.05901) + \binom{2.5}{2}(-0.03671) + \binom{2.5}{3}(0.00379)$$

$$f(0.7) \approx P_3(2.5) = 0.764898$$

تمارين عملي:

1. أوجد بطريقة نيوتن الأمامية الحدودية الملائمة للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول:

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y	0.61	1.09	1.58	2.09

ثم أوجد $f(2.33)$ و احسب الخطأ المرتكب.

2. اكتب جدول الفروق الأمامية للتابع $f(x) = e^x$ حيث:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$$

و أوجد كثيرة الحدود $P_2(x)$ و احسب قيمة تقريبية ل $f(0.5)$ ثم احسب الخطأ المرتكب.