كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : ميكانيك الموائع

المحاضرة: الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

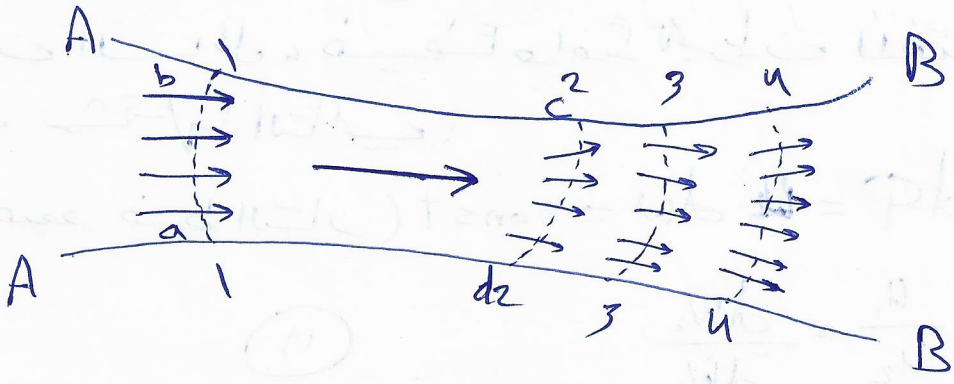
Facebook Group : مكتبة A to Z

مقرر: الموائع — السنة الثالثة

المحاضرة: الخامسة — د. علي أبو سد

معادلة الاستمرارية لجريان أحادي البعد

1 حالة التغير الحاد للجريان: نتصور جريان سائل كما في الشكل ونعين عليه مجموعة من المقاطع (1-1, 2-2, 3-3, 4-4) والجزيء abcd المحور بين المقطعين (1-1) و (2-2) محاط بالجدران الكتيمة (AB) التي تمنع مرور السائل إلى الخارج. نرمز للتدفق من المقطع (1-1) بالرمز (Φ_1) وللتدفق عبر المقطع (2-2) بالرمز (Φ_2) فخلال الزمن (dt) يدخل إلى الجزء $(abcd)$ عبر المقطع (1-1) حجم من السائل مقداره $\Phi_1 \cdot dt$ ويخرج خلال نفس الزمن كمية من السائل خلال المقطع (2-2) مقدارها $\Phi_2 \cdot dt$.



لو أخذنا بعين الاعتبار أن السائل غير قابل للانضغاط وجريه بشكل متواصل دون تشكل فجوات لأمكن القول: إن حجم السائل الداخل يجب أن يتساوى مع حجم السائل الخارج أي

$$\Phi_1 \cdot dt = \Phi_2 \cdot dt \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 \quad (1)$$

يمكن تعميم هذه النتيجة على جميع مقاطع الجريان وبالتالي يكون

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \cdots = \Phi = const \quad (2)$$

تدعى المعادلة (2) بمعادلة الاستمرارية وأحياناً بمعادلة عدم قابلية الانضغاط وهي تبين أنه في حالة الحركة المستقرة تمر خلال مقطع من مقاطع التدفق في وحدة الزمن كتلة ثابتة من السائل

2- حالة التغير اللامس للجريان، والجريان المنتظم:

في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة الاستمرارية على الشكل التالي:

$$w \cdot v = \text{const}$$ (في حدود الجريان)

ومنه ينتج:

$$w_1 \cdot v_1 = w_2 \cdot v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1} \qquad (3)$$

يلاحظ من المعادلة (3) أن السرعات المتوسطة للتدفق تتناسب عكساً مع مساحات المقاطع المقابلة ولو أخذنا بدلاً من كامل مقطع جريان السائل، عنصراً F وامتداً للجريان لأخذت المعادلات السابقة شكلها التالي:

$$d\Phi = u \cdot dw = \text{const}$$ (في حدود عنصر التيار)

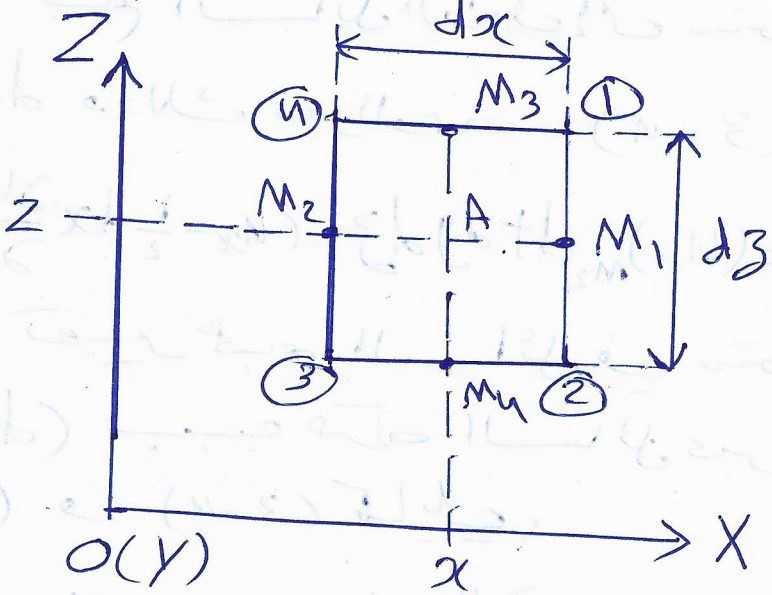
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{dw_2}{dw_1} \qquad (4)$$

3- معادلة الاستمرارية لجريان ثلاثي البعد غير قابل للانضغاط

نضع كما في الشكل الإحداثيات (X, Y, Z) بحيث يكون المحور (Y) متعامداً مع مستوى الرسم وعند ذلك الشكل نقطة ثابتة (A) ذات الإحداثيات (x, y, z) ونعبر عن السرعة (u) في النقطة (A) عند الزمن t بمركباتها (u_x) و (u_y) و (u_z). ونحدد حول

النقطة (A) متوازي السطوح (1-2-3-4) صغير جداً

بحيث امتداداته هي (dx) ، (dy) ، (dz)



لنحدد حجم السائل الداخل إلى متوازي السطوح خلال الزمن (dt) وحجم السائل الخارج منه خلال نفس الزمن (dt). إذا كانت مركبة السرعة الأفقية في النقطة A تساوي U_x فهي تبلغ في النقطة (M_1) التي تبعد عن A بمقدار ($\frac{1}{2}dx$)

$$(U_x)_{M_1} = U_x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U_x}{\partial x}dx \qquad (5)$$

وعند النقطة (M_2) سوف تساوي

$$(U_x)_{M_2} = U_x - \frac{1}{2}\frac{\partial U_x}{\partial x}dx \qquad (6)$$

حيث يمثل $\frac{\partial U_x}{\partial x}$ تغير قيمة (U_x) الحاصلة بالنسبة لواحدة الكتلة والمقاسة في حدود الخط (M_1M_2) الموازي لمحور الإحداثيات (oX).

لحدد حجم السائل الخارج من متوازي السطوح خلال الزمن (dt) وذلك خلال الوجه (1-2) بالمعادلة

$$\Delta V_1 = (U_x)_{M_1}\,dt\,dy\,dz = \left(U_x + \frac{1}{2}dx\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)dy\,dz\,dt \qquad (7)$$

حيث أن $dydz$: مساحة الوجه (2-1)

كما يمد حجم السائل الداخل إلى متوازي السطوح خلال الزمن dt وذلك عبر الوجه (4-3) بالعلاقة

$$\Delta V_2 = (u_x)_{M_2} dt\, dy\, dz = \left(u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) dy\, dz\, dt \quad (6)$$

ويكون تغير حجم السائل في متوازي السطوح خلال الفترة (dt) بسبب حركة السائل عبر السطحين المتقابلين (2-1) و (4-3) كما يلي:

$$\Delta V_1 - \Delta V_2 = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\, dy\, dz\, dt \quad (9)$$

وبشكل مماثل يمكن أن نكتب للأوجه الأخرى المتبقية من متوازي السطوح

$$\Delta V_3 - \Delta V_4 = \frac{\partial u_y}{\partial y} dx\, dy\, dz\, dt \quad (10)$$

$$\Delta V_5 - \Delta V_6 = \frac{\partial u_z}{\partial z} dx\, dy\, dz\, dt \quad (11)$$

في حالة كون السائل غير قابل للانضغاط وبافتراض أن درجة الحرارة ثابتة، يمكن أن نكتب:

$$(\Delta V_1 - \Delta V_2) + (\Delta V_3 - \Delta V_4) + (\Delta V_5 - \Delta V_6) = 0 \quad (12)$$

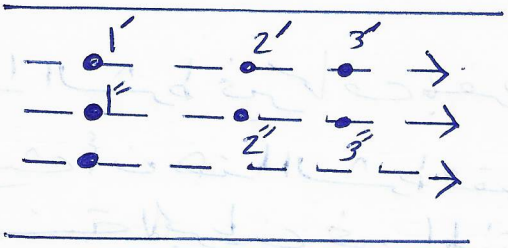
بتعويض المعادلات (9) و (10) و (11) في (12) والاختصار على $dx\,dy\,dz\,dt$ نحصل في النهاية على المعادلة التفاضلية لجريان السوائل غير القابلة للانضغاط:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

4) الجريان المنتظم وغير المنتظم والسوائل غير القابلة للانضغاط:

نتعرف حالتي الجريان المستقر وغير المستقر:

1) الجريان المستقر: نتصور على الشكل مقطعاً F في تيار ذي مقطع إسطواني ثابت ($W=const$) نحدد على الشكل مجموعة من مقاطع الجريان مع مجموعة من المستقيمات التي توازي محور الجريان المماثلة في جدار الأنبوبة. إذ أنه ليس بالضرورة أن تكون هذه المستقيمات خطوطاً للتيار.



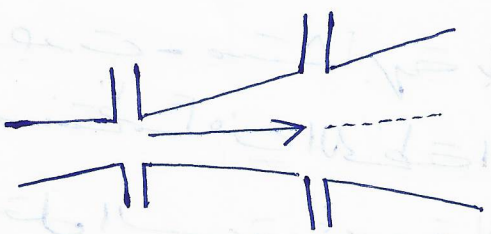
((الجريان المنتظم))

إن مجموعة النقاط العائدة لنفس المستقيم والواقعة على مقاطع جريان مختلفة مثلاً $3',2',1'$ أو النقاط $3'',2'',1''$ يمكن أن تدعى بالنقاط المتلائمة

يكون الجريان غير منتظم في حال:

1) إن مقاطع الجريان تتغير من قيمتها $W\neq const$

2) أو أن مقاطع الجريان تبقى ثابتة $W=const$ غير أن السرعة في النقاط المتلائمة $(u_1,u_2,u_3,\dots)$ تكون غير متساوية فيما بينها $(u_1\neq u_2\neq u_3\dots)$



الجريان غير منتظم

يكون الجريان منتظماً عندما تكون الحركة مستقيمة بحيث يكون ($w = const$) للتيار شكل إسطواني وتكون السرعة (u) في النقاط المتلائمة متساوية بالقيمة ومتفقة بالاتجاه، ويكون عند ذلك لمخطط توزع السرع في جميع المقاطع متماثلة ومتماثلة ومتماثلة شكل واحد.

تتميز الحركة المنتظمة أيضاً بتوازي خطوط التيار، وبأن مقاطع الجريان فيها مستوية، كما أن السرعة العظمى (V) في مثل هذه الحركة دائماً ثابتاً

$$V = const$$

نجد أن هذا الشرط غير كاف بمفرده لتحديد فيما إذا كان الجريان منتظماً حيث أن هذا الشرط محقق أيضاً في حالة الجريان غير المنتظم، بالنسبة للجريان غير المنتظم فإنه داخل هذا النوع من الحركة يكون

* تغير الحركة سلس: وذلك عندما تكون مقاطع الجريان كلها أو بعضها مستوية
* تغير الحركة حاد: عندما لا يجوز اعتبار مقاطع الجريان مستوية

ط) الجريان غير المستقر: يتم استخدام وجهة نظر أولر عند تحديد مفاهيم الحركة للجريان غير المستقر، وذلك اعتماداً على دراسة حقل السرعة عند لحظة زمنية معينة، وبالتالي إذا كان الحقل متماثلاً بالنسبة للسرعة (أي في حدود الحقل المدروس تكون أشعة السرعة - أينما وجدت - متشابهة بالاتجاه ومتساوية بالقيمة) يكون الجريان منتظماً في اللحظة الزمنية المدروسة، أما عندما يكون حقل السرعة غير متماثل فتكون الحركة غير منتظمة

مكتبة A to Z