كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : برمجة رياضية

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التفاضل الكلي : *Total Differential*

لإيجاد التفاضل الكلي للدالة $f(x)$ نستخدم التعليمة Dt أي :

$$\mathrm{Dt}[f(x)] \quad \leftrightarrow \quad df$$

وهذا يكافئ رياضياً في حال كانت الدالة تابعة لمتحولين $x\ ,\ y$:

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

ولتحديد التفاضل الكلي بالنسبة لمتحول معين نكتب :

$$\mathrm{Dt}[f(x),x] \quad \leftrightarrow \quad \frac{df}{dx}$$

أمثلة :

Dt[x^2, x]

$2x$

Dt[x^3]

$3x^2\mathrm{Dt}[x]$

Dt[Cos[x] + 12x^2, x]

$24x - \mathrm{Sin}[x]$

Dt[x^2 + 3y, x]

$2x + 3\mathrm{Dt}[y, x]$

Dt[x^2 + 3y]

$2x\mathrm{Dt}[x] + 3\mathrm{Dt}[y]$

Dt[x^2 + 3y + z]

$$2x\mathrm{Dt}[x] + 3\mathrm{Dt}[y] + \mathrm{Dt}[z]$$

التفاضل الجزئي :

يُمثل التفاضل الجزئي رياضياً ب $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، وللتعبير عنه في الماثيماتكا نستخدم التعليمة : $\mathrm{D}[f, \mathrm{x}]$ أي :

$$\mathrm{D}[f, x] \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

كما يمكن حساب المشتق الجزئي عند نقطة معينة (x_0, y_0) بالشكل :

$$\mathrm{D}[f, \mathrm{x}] \ /.\{x \to x_0, y \to y_0\} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ولإيجاد المشتق من المرتبة n نكتب :

$\mathrm{D}[f, \{\mathrm{x}, n\}]$ حيث n عدد مرات الاشتقاق .

ولإيجاد المشتقات من مراتب مختلفة ولمغيرات مختلفة نكتب :

$$\mathrm{D}[f, \{\mathrm{x}, n1\}, \{y, n2\}, \{z, n3\}] \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x^{n1} \partial y^{n2} \partial z^{n3}}$$

أو باستخدام التعليمة :

$$Derivative\,[n1, n2, n3][f][x_0, y_0, z_0]$$

أمثلة :

$D[x\text{^}3, x]$

$3x^2$

$\mathrm{D}[\mathrm{Cos}[x] + 12x\text{^}2, x]$

$24x - \mathrm{Sin}[x]$

$D[x\text{^}2 + 3y, x]$

$2x$

$D[x\text{^}2 + 3y + z]$

$x^2 + 3y + z$

أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية للوغاريتم x^2 .

$\text{Dt}[\text{Log}[x\text{^}2], \{x, 2\}]$

$-\frac{2}{x^2}$

أوجد مشتق التابع $f(x) = x.Ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ بالنسبة لـ x .

$\text{Dt}[x * \text{Log}[x/\text{Sqrt}[1 - x\text{^}2]], x]$

$$\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \text{Log}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

ملاحظة هامة :

في الرياضيات يتم اعتماد Ln للدلالة على أخذ اللوغاريتم بالأساس النيبري e أي Log_e ، والرمز Log للدلالة على اللوغالايتم بالأساس 10 أي Log_{10} ، أما في الماثيماتكا الرمز Log[ ] يعبر عن اللوغاريتم النيبري ، عدا ذلك يجب كتابة الأساس بالشكل :

$Log_{10}(\text{x}) \leftrightarrow \text{Log}[10, \text{x}]$

$Log_2(\text{x}) \leftrightarrow \text{Log}[2, \text{x}]$

وهكذا .....

أمثلة :

$\text{Log}[10, \text{x}]$

$$\frac{\text{Log}[x]}{\text{Log}[10]}$$

$\text{Log}[10,10]$

1

$N[\text{Log}[10]]$

2.30259

$2x$

$D[x\text{^}2 + 3y + z]$

$x^2 + 3y + z$

أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية للوغاريتم x^2 .

$\text{Dt}[\text{Log}[x\text{^}2], \{x, 2\}]$

$-\frac{2}{x^2}$

أوجد مشتق التابع $f(x) = x.Ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ بالنسبة لـ x .

$\text{Dt}[x * \text{Log}[x/\text{Sqrt}[1 - x\text{^}2]], x]$

$$\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \text{Log}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

ملاحظة هامة :

في الرياضيات يتم اعتماد Ln للدلالة على أخذ اللوغاريتم بالأساس النيبري e أي Log_e ، والرمز Log للدلالة على اللوغالايتم بالأساس 10 أي Log_{10} ، أما في الماثيماتكا الرمز Log[ ] يعبر عن اللوغاريتم النيبري ، عدا ذلك يجب كتابة الأساس بالشكل :

$Log_{10}(\text{x}) \leftrightarrow \text{Log}[10, \text{x}]$

$Log_2(\text{x}) \leftrightarrow \text{Log}[2, \text{x}]$

وهكذا .....

أمثلة :

$\text{Log}[10, \text{x}]$

$$\frac{\text{Log}[x]}{\text{Log}[10]}$$

$\text{Log}[10,10]$

1

$N[\text{Log}[10]]$

2.30259

تمرين :

عرف دالة وسمها differentialq تظهر لنا إن كانت الدالة المدخلة قابلة للاشتقاق أو لا عند نقطة $x1$ وإذا كانت قابلة للاشتقاق تعطي قيمة المشتق عند كل النقطة .

ثم تحقق من خلالها إن كانت الدالة $f(x) = \sqrt{3 - x}$ قابلة للاشتقاق عند 3 .

الحل :

```
differentialq[f_, x1_]:= (
a = Limit[(f[x1 + h] - f[x1])/h, h → 0, Direction → -1];
b = Limit[(f[x1 + h] - f[x1])/h, h → 0, Direction → +1];
If[a == b, Print[a, "و المشتق هو", x1, "الدالة قابلة للاشتقاق عند"],
Print[x1, "الدالة غير قابلة للاشتقاق عند"]])
f[x_]:= Sqrt[3 - x];
differentialq[f, 3]
```

```
الدالة غير قابلة للاشتقاق الدالة 3
```

نعلم أن معادلة المستوي المماس لسطح معطى بالعلاقة $z = f(x, y)$ في النقطة (x_0, y_0, z_0) تُعطى بالعلاقة :

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

تمرين :

حدد معادلة المستوي المماس لمجسم القطع المكافئ $z = 10 - x^2 - 2y^2$
عندما $y = 2$, $x = 1$ ، ثم ارسم مجسم القطع المكافئ والمستوي المماس .

الحل :

$f[x_,y_]:=10-x\text{^}2-2y\text{^}2;$

$z=f[1,2]+\text{Derivative}[1,0][f][1,2](x-1)$

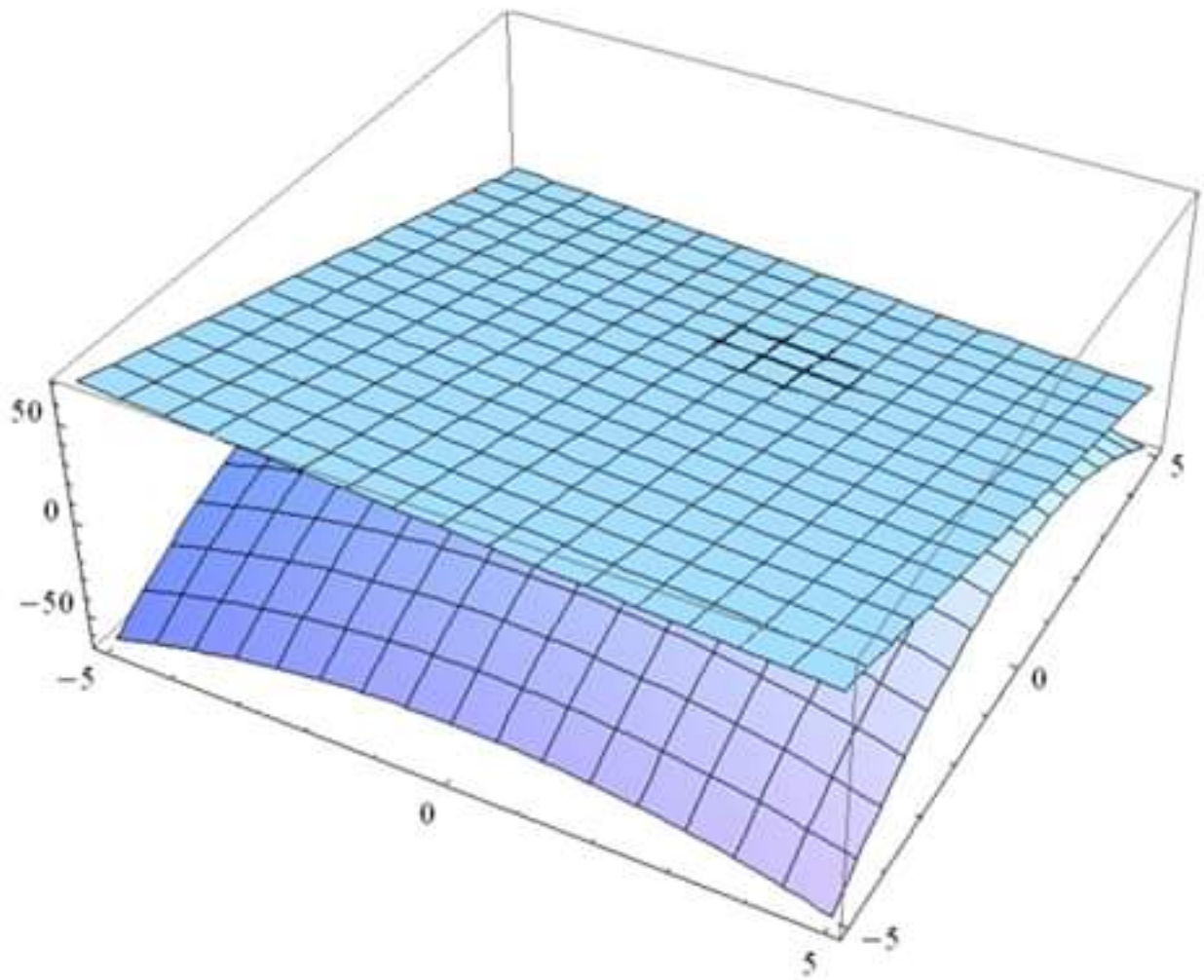
$+\text{Derivative}[0,1][f][1,2](y-2)//\text{Expand}$

$\boxed{19-2x-8y}$

$g1=\text{Plot3D}[z,\{x,-5,5\},\{y,-5,5\}];$

$g2=\text{Plot3D}[f[x,y],\{x,-5,5\},\{y,-5,5\}];$

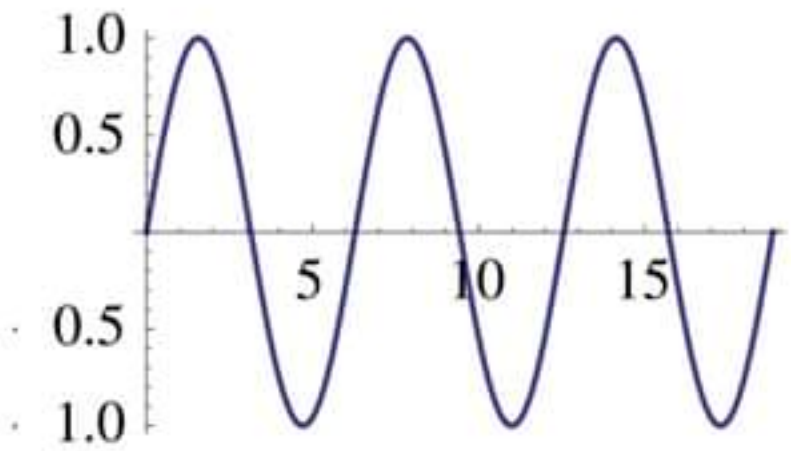
$\text{Show}[g1,g2,\text{PlotRange}\rightarrow\text{All}]$



تمارين محلولة (2)

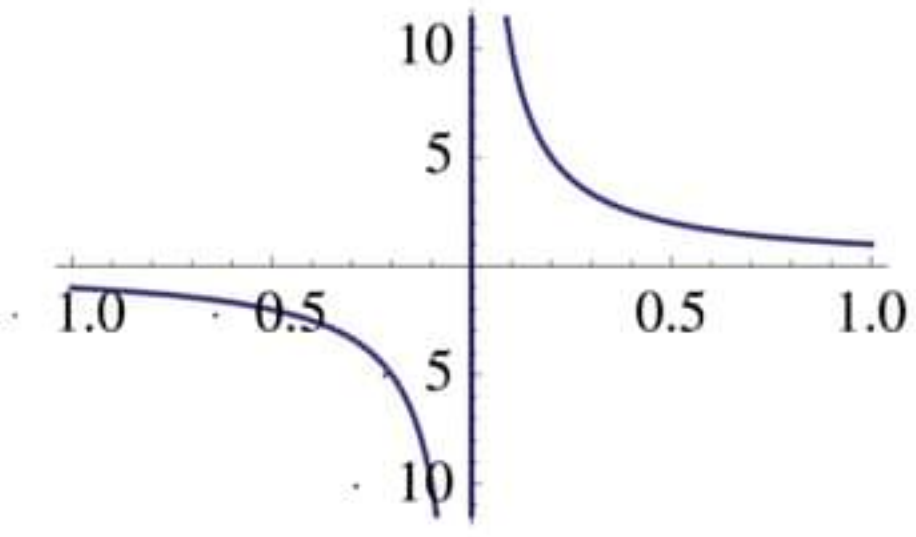
- عرف الدالة $f(x) = \sin x$ ثم ارسمها في المجال $[0,6\pi]$

```
In[1]:= Plot[Sin[x], {x, 0,6Pi}]
Out[1] =
```



- ارسم القطع الزائد الذي معادلته $f(x) = \frac{1}{x}$ ضمن المجال $[-1,1]$

```
In[2]:= Plot[1/x, {x, -1,1}]
Out[2] =
```



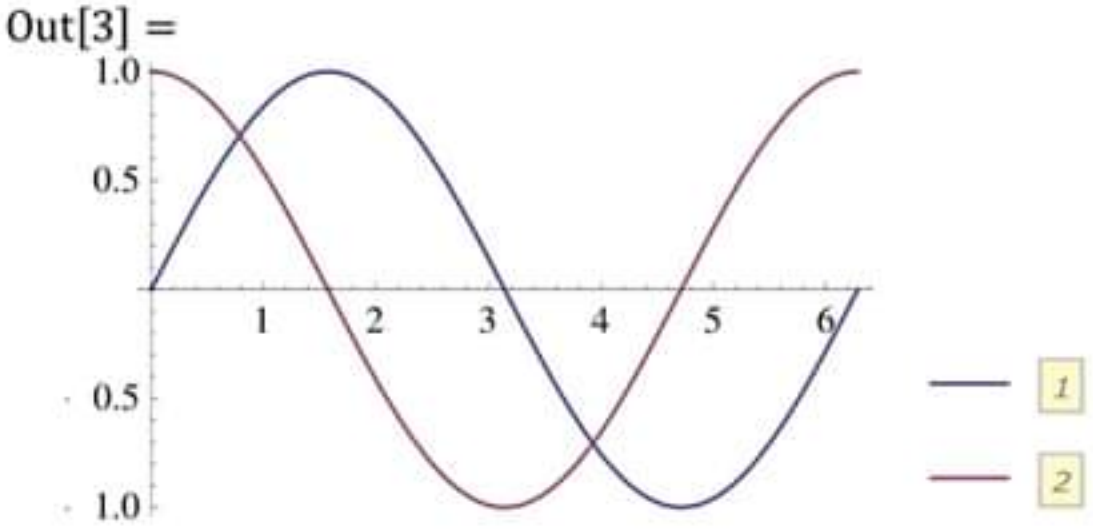
- عرف كل من الدالتين : $f(x) = sinx$, $g(x) = Cosx$

ثم ارسمهما معاً في المجال $[0,2\pi]$

```
In[3] := f[x_] = Sin[x];
        g[x_] = Cos[x];
```

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0,2Pi}, PlotLegends → Automatic]
```

Out[3] =



ملاحظة :

- ✓ **التعليمة** PlotLegends → Automatic **بينت لنا أن الخط البياني رقم (1) الملون بالأزرق يمثل التابع** Sin[x] **أما رقم (2) يمثل تابع** Cos[x] .
- ✓ **يمكن كتابة التعليمة مباشرة بوضع التابعين ضمن القوسين** { } :

```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0,2Pi}, PlotLegends → Automatic]
```

- **شكل دالة تعبر عن متتالية فيبوناتشي وسمها** fib **ثم استخدمها لإيجاد العدد** 30 **من متتالية فيبوناتشي(أي دون استخدام التعليمة** *Fibonacci*)

```
In[4] := fib[1] = 1;
         fib[2] = 1;
        fib[n_]:= fib[n − 1] + fib[n − 2]
        fib[30]
Out[4] =  832040
```

- **أوجد نهاية كل من الدوال التالية :**

1. $f(x) = \frac{2^x+x-1}{3x}$ $x \to 0$

```
In[5] := Limit[(2^x + x − 1)/3x, x → 0]
Out[5] =  0
```

2. $g(x) = \frac{\tan x - x}{x^3}$ $x \to 0$

```
In[6] := Limit[(Tan[x] − x)/x^3, x → 0]
Out[6] = 1/3
```

3. $h(x) = (1 + \sin x)^{\cot 2x}$ $x \to 0$

$\text{In}[7] := \text{Limit}[(1 + \text{Sin}[x])\text{^Cot}[2x], x \to 0]$

$\text{Out}[7] = \sqrt{e}$

4. $e(x) = \text{Sin}[x]$ $x \to \infty$

$\text{In}[8] := \text{Limit}[\text{Sin}[x], x \to \infty]$

$\text{Out}[8] = \text{Interval}[\{-1,1\}]$

الخرج $\text{Interval}[\{-1,1\}]$ يبين أن النهاية ضمن المجال $[-1,1]$

- أوجد المشتقات في كل مما يلي :

a) مشتق $x\text{^}n$ بالنسبة لِ x

$\text{In}[9] := D[x^n, x]$

$\text{Out}[9] = nx^{-1+n}$

b) المشتق الكلي لِ $x * y$

$\text{In}[10] := \text{Dt}[x * y]$

$\text{Out}[10] = y\text{Dt}[x] + x\text{Dt}[y]$

c) المشتق الكلي لِ $x * y$ بالنسبة لِ x

$\text{In}[11] := \text{Dt}[x * y, x]$

$\text{Out}[11] = y + x\text{Dt}[y, x]$

d) المشتق الكلي لِ $x * y$ بالنسبة لِ y

$\text{In}[12] := \text{Dt}[x * y, y]$

$\text{Out}[12] = x + y\text{Dt}[x, y]$

e) أوجد المشتق الثالث ل $\text{Sin}(x)$:

$\text{In}[13] := D[2\text{Sin}[x], \{x, 3\}]$

$\text{Out}[13] = -2\text{Cos}[x]$

f) باستخدام التعليمة Derivative أوجد مشتق $\text{Cos}[x]\text{Sin}[y]$ بالنسبة لِ x

$\text{In}[14] := f[\text{x_}, \text{y_}] = \text{Cos}[x]\text{Sin}[y];$
$\text{Derivative}[1,0][f][x, y]$

```
Out[14] = −Sin[x]Sin[y]
```

g) باستخدام التعليمة Derivative أوجد مشتق $\mathrm{Cos}[x]\mathrm{Sin}[y]$ بالنسبة لـ x , y حيث x من الدرجة الأولى و y من الدرجة الثانية .

```
In[15] := f[x_, y_] = Cos[x]Sin[y];
          Derivative[1,2][f][x, y]
Out[15] = Sin[x]Sin[y]
```

ثم أوجد قيمة المشتق في النقطة $(1,3)$

```
In16 := Derivative[1,2][f][1,3]
Out[16] = Sin[1]Sin[3]
```

ثم أوجد قيمة المشتق في النقطة $(0,0)$

```
In[17] := Derivative[1,2][f][0,0]
Out[17] = 0
```

- نعلم أن مشتق الدالة $f(x)$ يعرف بالشكل : $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

استخدم هذا التعريف لحساب مشتق الدالة $f(x) = x + \sin x$ ثم احسب قيمة هذا المشتق عند الصفر .

```
In[18] := f[x_] = x + Sin[x];
          Limit[(f[x + h] − f[x])/h, h → 0]
Out[18] = 1 + Cos[x]
In[19] := 1 + Cos[x] /. x → 0
Out[19] = 2
```

ملاحظة : يمكن وضع $1 + \mathrm{Cos}[x]$ % /. $x \to 0$ بدلاً من إعادة كتابة

مكتبة A to Z