كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الجداء اللانهائي هيئة: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$$

يمكن دراسة تقارب باستخدام الاختبارات السابقة.

مثال:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

من أجل: $\ln(1+x) \le x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربة $\Rightarrow$ الجداء متقارب.

تمرين: الجداء التوافقي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ متباعدة.

ملاحظة: الجداءات اللامتناهية لها صيغ مختلفة قد تكون الجداء من الشكل المذكور سابقاً أو بالصيغة التالية:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

تمرين: أدرس تقارب الجداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

ملاحظة مهمة جداً: بشكل عام لدراسة تقارب جداء لانهائي نأخذ متتالية الجداءات الجزئية وندرس تقارب هذه المتتالية

ونرمز لها بـ $P_1=a_1$ ، $P_2=a_1\times a_2$ ، $P_3=a_1\times a_2\times a_3$ ... $\times a_n$

وندرس تقارب المتتالية فإذا كانت متقاربة من عدد ℓ نقول أن الجداء اللانهائي متقارب ومساوي ℓ

حلّ التمرين:

$$P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left(\frac{4-1}{4}\right)\left(\frac{9-1}{9}\right)\left(\frac{16-1}{16}\right)\cdots\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$=\left[\frac{(2-1)(2+1)}{4}\right]\times\left[\frac{(3-1)(3+1)}{9}\right]\times(4-1)(4+1)\times\cdots(n-1)(n+1)$$

$$=\frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\cdots(n-1)(n+1)}{4\times9\times\cdots\times n\times n}$$

$$=\frac{1\times2\times\cdots\times(n-1)\times3\times4\times n+1}{2\times2\times3\times3\times\cdots\times n\times n}\times\frac{2}{2}$$

$$P_n=\frac{(n-1)!\,(n+1)!}{2n!\;n!}=\frac{(n-1)!\,(n+1)(n!)}{2n(n-1)!\cdot(n!)}=\frac{n+1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ المتسلسلة متقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}$

$P_n=\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}P_n=0$ ⟵ الجداء متقارب من الصفر

تمرين: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n}$

$P_n=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}P_n=\infty$ ⟵ الجداء متباعد

مبرهنة: الشرط اللازم وغير الكافي ليكون الجداء متقارب هو أن يكون $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ رابط العام

مبرهنة: نفرض أن a_n متتالية أعداد حقيقية ورابط 1 عندئذٍ حتى يتقارب الجداء اللانهائي يلزم ويكفي أن تتقارب المتسلسلة مجموع لوغاريتم a_n بدءاً من حد معين

تمرين: $\prod_{n=2}^{\infty}e^{\frac{1}{n}}$

$P_n=e^1\times e^{\frac{1}{2}}\times\cdots\times e^{\frac{1}{n}}$

$\ln P_n=\ln e^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$ ⟵ متباعدة ⟵ الجداء متباعد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متتاليات وسلاسل الدوال العددية

تعريف: نقول عن متتالية مجموع $(f_n(x))$ متقاربة نقطياً من دالة $f(x)$ إذا كان $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

ونسمي تقارب نقطي (بسيط) ويتحقق الشرط:

$\forall \varepsilon > 0 \ \& \ x \in D : \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$

بحيث إذا كان $n > N(\varepsilon, n)$ كان $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

مثال:

$f_n(x) = \frac{x}{n+1}$ $(f_n(x))$

$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ المعرفة على $\mathbb{R}$

متتالية الدوال متقاربة من الدالة $f(x) = 0$

برهان أنها متقاربة

$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n+1}\right| < \varepsilon$

$\frac{|x|}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{x}{\varepsilon}$

$n > \frac{|x|}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow N(\varepsilon, n) = \frac{|x|}{\varepsilon} - 1$ وهو $\mathbb{N}$

مثال: $f_n(x) = x^n$ المعرفة على مجال مغلق $[0,1]$ أدرس تقارب متتالية الدوال

$f_n(x) = x^n$ ؛ $x \in [0,1]$

عندما $x = 1$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

عندما $x \in [0,1[$ $\Leftarrow \lim_{n\to\infty} x^n = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0,1[\\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

نلاحظ أنّ الدالة غير مستمرة عند 1 بالرغم من أنّ كلّ f_n من حدود المتتالية دالة مستمرة

مثال:

$$f_n(x) = n x (1-x^2)^n \; ; x \in [0,1]$$

$$0 < x < 1$$

$$0 < x^2 < 1$$

$$0 > -x^2 > -1$$

$$1 > 1-x^2 > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-x^2)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

ومنه متقاربة من الدالة $f(x)=0$

تعريف: نقول عن التقارب النقطي أنّه منتظم إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

$$n > N(\varepsilon)$$

مثال: $f(x) = \frac{x}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n = 0$$

تقارب نقطي

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{x}{n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{x}{n} = \frac{1}{n} = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: في المثال $f_n(x) = x^n$ على المجال $[0,1]$
وجدنا تقارب نقطي من الدالة الصفرية

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; [0,1[\\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

هذا التقارب غير منتظم لأن

$$\sup |x^n - f(x)|$$

على المجال $x \in [0,1]$ والتقارب غير منتظم

اختبار وايرستراس للتقارب المنتظم للسلاسل الدوال:
فكرته الأساسية هي: إذا استطعنا ضبط حدود الدوال بسلسلة عددية متقاربة فإن متسلسلة الدوال تكون متقاربة بشكل منتظم أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون $x \in D$ ؛ متقاربة بانتظام إذا وجدت متتالية عددية (M_n) حيث $|f_n(x)| \le M_n \; \forall x \in D$ وكانت المتسلسلة $\sum M_n$ متقاربة

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \; ; \; x \in [0,1]$$

متقاربة من الدالة $f(x) = 0$

$$\left(\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{n^2} = 0 \right.$$
$$\left. f(x) = 0 \text{ تقارب نقطي من} \right)$$

$$\frac{x^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة

$\sum \frac{x^n}{n^2}$ متقاربة بانتظام حسب وايرستراس

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خاصية: التقارب النقطي نبرهن لكل x على حدى بينما التقارب المنتظم نضمن فيه أن التقارب يحدث بنفس السرعة على كامل المجال واختبار وايرستراس نستخدمه إذا استطعنا ضبط حدود الدالة إلى سلسلة عددية متقاربة ومنه نحكم على تقارب منتظم.

مثال:

متسلسلة دوال متقاربة بانتظام على مجال بميزة نقاط المشكلة (اختبار ديريخليه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ على $[5, -\pi, -5]$

$0 < 5 < \frac{\pi}{2}$

إذا كانت المجاميع الجزئية لمجموع $\sum \sin(nx)$ محدودة على هذا المجال وكانت المتتالية $(\frac{1}{n})$ متناقصة وتؤول إلى الصفر نحكم على تقارب منتظم.

$$S = \sum_{n=1} \sin nx =$$

$$\frac{(\sin \frac{Nx}{2}) \times (\frac{N+1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$$

ولدينا $[5, -\pi, 5] \subset$

$$SN(x) \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

محدود

$\frac{1}{n}$ متناقصة ط وتؤول إلى 0 بالتالي المتسلسلة متقاربة بانتظام.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة