كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : الخامسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين: لتكن لدينا المتسلسلتين

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2n}$$

ادرس تقارب هاتين المتسلسلتين.

الحل:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$$

نقوم باختبار القيمة المطلقة:

$$\left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right| = \sin\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ نقارنه مع السلسلة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة

فالسلسلة المفروضة متباعدة.

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2n}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$ نكتبها بالشكل

المتسلسلة متناوبة إذاً لكي نكتب بالشكل $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

متناقصة وشرط صغر حسب اختبار السلاسل المتناوبة

المتسلسلة متقاربة.

أو

$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} : \frac{1}{(n)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow p = \frac{1}{2} > 1$

المتسلسلة متقاربة حسب ريمان.

ملاحظة: إذا كانت سلسلة القيم المطلقة متباعدة وبالتالي السلسلة المفروضة متقاربة شرطياً.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$

متسلسلة متقاربة شرطياً لأنك $\lim_{n\to\infty} = 0$ ومتناقصة.

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$

نأخذ القيمة المطلقة.

$\left|\frac{\sin n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$

وبما أن $\sum \frac{1}{n^3}$ متقاربة فالمتسلسلة الموضحة متقاربة مطلقاً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اختبار دالمبير (اختبار النسبة): هنا نبحث فيما إذا كانت السلسلة مطلقة التقارب أم لا فإذا كانت متقاربة مطلقاً نقول أنها متقاربة

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ ⇒ $\begin{cases} L>1 & \text{متباعدة} \\ L<1 & \text{متقاربة} \\ L=1 & \text{لا يمكننا الحكم عليها} \end{cases}$

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left|\frac{(-10)^{n+1}}{4^{2n+3}(n+2)} \cdot \frac{4^{2n+1}\cdot(n+1)}{(-10)^n}\right| = \left|\frac{(-10)^n \times -10}{4^{2n+1}\times 4^2(n+2)} \cdot \frac{4^{2n+1}\cdot(n+1)}{(-10)^n}\right|$

$= \left|\frac{-10}{16} \cdot \frac{n+1}{n+2}\right| = \frac{10}{16}\frac{n+1}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty} = \frac{10}{16} < 1$

متسلسلة دالمبير المتسلسلة

متقاربة

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!}\right| = \left|\frac{n+1}{5}\right|$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = +\infty > 1$ متباعدة حسب دالمبير

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اختبار كوشي (الجذر النوني):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \begin{cases} L>1 & \text{متباعدة} \\ L<1 & \text{متقاربة} \\ L=1 & \text{حالة} \end{cases}$$

ملاحظة: إذا كانت $L=1$ فهي حالة حالة وكانت القيمة المطلقة لـ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ أكبر من 1 يعني $a_{n+1}>a_n$ وكانت المتتالية a_n لا تسعى إلى الصفر فإن المتسلسلة الأساسية تكون متباعدة.

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

إذن المتسلسلة متقاربة حسب اختبار كوشي للتقارب

تمارين وملاحظات: ادرس تقارب المتسلسلات:

① $\sum \frac{1}{(\ln(n))^n}$ ، ② $\sum \left(\frac{5n-2}{3n+1}\right)^n$ ، ③ $\sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

اختبار آبله: إذا كانت المتسلسلة $\sum a_n$ حيث (a_n) متتالية أعداد حقيقية وجدنا عبارة عن جداء متتاليتين من الشكل: $\varepsilon_n a_n$ حيث (ε_n) المتتالية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متتالية حدودها موجبة و $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

متتالية حدود حقيقية (a_n)

$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

محدودة كانت المتسلسلة متقاربة.

بشكل خاص:

$a_n = (-1)^n$

تصبح المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n$ وتكون متقاربة

حسب ليبنز وجود حالة خاصة من آبل

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلتين

① $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cos nx$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin nx$

الحل:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cos nx$

نفرض ε_n تحقق الشروط السابقة

$S_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$

$x \neq 2\pi k$

$|S_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$

S_n محدودة والتالي المتسلسلة الأساسية متقاربة

حسب آبل

② $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sin nx \Rightarrow S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

$= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$ ومنه المتسلسلة

متقاربة حسب آبل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\frac{1}{n} = \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$S_n = \frac{a(1-a^n)}{1-a} = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < 1$$

$\Leftarrow$

المتتالية S_n محدودة $\Leftarrow$ المتسلسلة الأساسية متقاربة $\Leftarrow$ حسب اختبار آبل.

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}(3)^n$ حسب اختبار دالمبير

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+1}(3)^{n+1}}{\frac{1}{n}(3)^n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n+1} = 3 > 1 \longrightarrow \text{متباعدة}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اختبار رابه: يستخدم هذا الاختبار في الحالة
ذات الحدود الموجبة فقط وله الشكل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\ell \begin{cases} \ell>1 & \text{متقاربة} \\ \ell<1 & \text{متباعدة} \\ \ell=1 & \text{حالة حدية} \end{cases}$$

يستخدم هذا الاختبار عندما يكون لدينا حالة حدية
في المسير.

تمرين:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}{3\times6\times9\times\cdots\times3n}\right]^2$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left[\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}{3\times6\times9\times\cdots\times3n}\right]^2\times\left[\frac{3\times6\times9\times3n(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)(3n-1)(3n)(3n+1)}\right]$$

بالحساب والاختصار نجد أن:

$$=\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^2$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^2-1=\frac{9n^2+18n+9-9n^2-6n-1}{(3n+1)^2}$$

$$=\frac{12n+8}{9n^2+6n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+8n}{9n^2+6n+1}$$

$$=\frac{12}{9}>1$$

المتسلسلة متقاربة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: ادرس تقارب المتسلسلة: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

$$\int_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(\ln(x))^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^a$$

$$\lim_{a\to\infty} \left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^a = \lim_{a\to\infty} = -\frac{1}{\ln a} + \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{n\ln n}$$

المتسلسلة متقاربة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z